INTRODUZIONE ALLA TEORIA MATEMATICA DELLA ELASTICITÀ

PER

ERNESTO CESÀRO

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI

SOMMARIO: Cinematica dei piccoli moti - Componenti della deformazione - Potenziale delle forze elastiche - Equilibrio elastico - Teorema di Betti - Distribuzione delle azioni interne - Moto elastico - Applicazione alla sfera - Problema di Dirichlet - Proprietà delle deformazioni elastiche - Equazione canonica dei piccoli moti - Calcolo della dilatazione e della rotazione - Integrazione delle equazioni dell'equilibrio - Applicazione ai suoli elastici isotropi - Deformazioni termiche - Problema di Saint-Venant - Applicazione ai problemi della pratica - Coordinate curvilinee - Parametri differenziali - Sistemi isotermi - Equazioni dell'elasticità in coordinate curvilinee - Elasticità negli spazii curvi.

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI
ROMA
Via del Corso, 216-217
FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI
PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)
MESSINA
(Daly)
CATANIA
S. Maria al Ros.°, 23
(N. Carosio)

1894

PREFAZIONE

Ecco il primo d'una serie di volumi sulle **matematiche superiori**, nei quali mi propongo di avviare i giovani alla conoscenza delle varie discipline che andrò man mano insegnando liberamente nell'Università di Napoli. Queste che oggi pubblico sono le lezioni che ho avuto l'onore di fare in sostituzione del Prof. G. Battaglini, durante l'anno scolastico 1892-93. Esse non contengono nulla di nuovo, e nemmeno hanno la pretesa di costituire un corso completo sulla teoria matematica della elasticità, ma vogliono soltanto essere considerate come una preparazione alla lettura di tanti eccellenti trattati ed allo studio delle memorie, specialmente italiane, che sono state pubblicate su tale argomento.

Portici, 20 agosto, 1893.

E. CESÀRO.

PARTE PRIMA

I. CINEMATICA DEI PICCOLI MOTI.

1. In un primo studio approssimato dei fenomeni che si manifestano in un mezzo qualsiasi, questo si può paragonare ad un sistema di punti vicinissimi fra loro. Qui ci proponiamo di studiare le deformazioni d'un tal sistema, limitandoci a quelle che sono trascurabili rispetto alle mutue distanze dei punti, dimodochè, chiamati O ed M due di questi punti, e rappresentate con O' ed M' le loro posizioni, in seguito alla deformazione, sia lecito trattare gli spostamenti OO' ed MM' come infinitesimi rispetto alla stessa distanza infinitesima OM. Lo spostamento OO' d'un punto qualunque è individuato in grandezza e direzione dalle sue projezioni su tre assi ortogonali. Queste projezioni, che si chiamano *gli spostamenti* del punto O, e si rappresentano con u, v, w, sono, evidentemente, funzioni delle coordinate x, y, z di O. Supporremo che tali funzioni, già obbligate a prendere valori piccolissimi, siano inoltre continue, uniformi, derivabili una volta almeno, e che tutte queste proprietà appartengano anche alle derivate parziali prime e seconde. Nello studio cinematico delle piccole deformazioni hanno importanza le derivate parziali prime, considerate nelle seguenti combinazioni:

$$a=\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\quad f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\ ,\quad p=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\ ,$$

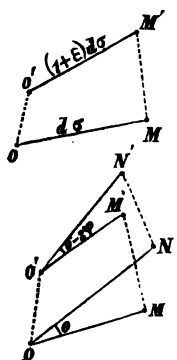
$$b=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad g=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\ ,\quad q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\ ,$$

$$c=\frac{\partial w}{\partial z}\ ,\quad h=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ ,\quad r=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Presto vedremo perchè le funzioni a, b, c, f, g, h, portano il nome di *componenti della deformazione*, mentre a p, q, r si dà quello di *componenti della rotazione* del mezzo.

2. Analizzando una deformazione si è naturalmente condotti a studiare, innanzi tutto, l'*alterazione delle distanze* dei punti vicinissimi, e l'*alterazione degli angoli* di due elementi lineari, con un estremo comune. Se

$$OM = d\sigma \quad , \quad O'M' = (1+\epsilon)d\sigma \, ,$$

il rapporto ϵ fra l'incremento di $d\sigma$ e lo stesso $d\sigma$ è il *coefficiente di allungamento* nella direzione OM. Se gli elementi OM ed ON fanno l'angolo θ prima della deformazione, e se $\theta - 2\varphi$ è, dopo la deformazione, l'angolo degli elementi stessi, che si son trasferiti in $O'M'$ ed $O'N'$, si dice che 2φ è lo *scorrimento* mutuo degli elementi considerati. Per calcolare queste due importanti quantità, ϵ e φ, è necessario stabilire alcune formole preliminari, che tendono a far conoscere le variazioni $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ subite dai coseni direttori d'un elemento lineare qualunque, per effetto della deformazione.

3. Se dx, dy, dz sono le projezioni di OM sugli assi, quelle di $O'M'$ sono $dx + du$, $dy + dv$, $dz + dw$. Dunque

$$\alpha = \frac{dx}{d\sigma} \quad , \quad \alpha + \delta\alpha = \frac{dx + du}{(1+\epsilon)d\sigma} \, ,$$

cioè

$$(1+\epsilon)(\alpha + \delta\alpha) = \alpha + \frac{du}{d\sigma} \; ;$$

poi, trascurando $\epsilon\delta\alpha$ nel primo membro, e scrivendo altre due relazioni analoghe per β e γ,

$$\delta\alpha = \frac{du}{d\sigma} - \epsilon\alpha \; , \quad \delta\beta = \frac{dv}{d\sigma} - \epsilon\beta \; , \quad \delta\gamma = \frac{dw}{d\sigma} - \epsilon\gamma \, .$$

In altri termini, se si osserva che

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma} = a\alpha + (h - r)\beta + (g + q)\gamma \ ,$$

si ha

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\alpha = -\epsilon\alpha + (q\gamma - r\beta) + (a\alpha + h\beta + g\gamma) \ , \\ \delta\beta = -\epsilon\beta + (r\alpha - p\gamma) + (h\alpha + b\beta + f\gamma) \ , \\ \delta\gamma = -\epsilon\gamma + (p\beta - q\alpha) + (g\alpha + f\beta + c\gamma) \, . \end{array}\right. \tag{1}$$

4. Ciò premesso, si considerino due elementi, definiti in direzione dalle terne di coseni (α, β, γ) ed $(\alpha', \beta', \gamma')$. Sia θ il loro angolo, dimodochè

$$\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' .$$

Se 2φ è l'angolo di cui θ diminuisce per effetto della deformazione, si ha pure

$$\cos(\theta - 2\varphi) = (\alpha + \delta\alpha)(\alpha' + \delta\alpha') + (\beta + \delta\beta)(\beta' + \delta\beta') + (\gamma + \delta\gamma)(\gamma' + \delta\gamma') \ ,$$

cioè

$$2\varphi \operatorname{sen}\theta = (\alpha'\delta\alpha + \beta'\delta\beta + \gamma'\delta\gamma) + (\alpha\delta\alpha' + \beta\delta\beta' + \gamma\delta\gamma') .$$

Ora le formole (1) dànno

$$\begin{aligned} &\alpha'\delta\alpha + \beta'\delta\beta + \gamma'\delta\gamma \\ &= -\epsilon\cos\theta + p(\beta\gamma' - \gamma\beta') + q(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + r(\alpha\beta' - \beta\alpha') \\ &+ a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha') . \end{aligned}$$

Similmente, se si scambiano fra loro le due terne,

$$\begin{aligned} &\alpha\delta\alpha' + \beta\delta\beta' + \gamma\delta\gamma' \\ &= -\epsilon'\cos\theta - p(\beta\gamma' - \gamma\beta') - q(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') - r(\alpha\beta' - \beta\alpha') \\ &+ a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha') . \end{aligned}$$

Sommando si perviene alla formola generale

$$\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon')\cos\theta$$
$$= a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

5. Supponiamo che le due direzioni coincidano; allora si ha $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\epsilon = \epsilon'$, $\theta = 0$, e la formola precedente diventa

$$\epsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta. \tag{2}$$

Se le due direzioni sono fra loro perpendicolari, è $\theta = \frac{\pi}{2}$, e la medesima formola dà

$$\varphi = a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \tag{3}$$

In particolare, per $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, è $\epsilon = a$, ecc. Per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ed $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 1$, è $\varphi = f$; ecc. Dunque *a, b, c sono i coefficienti di allungamento dei tre elementi lineari paralleli agli assi,* ed *f, g, h sono le metà degli scorrimenti mutui dei medesimi elementi.*

6. Se i valori che le componenti della deformazione assumono nel punto O non sono tutti nulli, l'eguaglianza (2), in cui si pone $\epsilon = 0$, diventa un'equazione omogenea di secondo grado in α, β, γ. Dunque *gli elementi,* uscenti da O, *che non si allungano nè si accorciano, sono collocati sulle generatrici d'un cono quadrico,* col vertice in O. Questa superficie, che si chiama *cono di scorrimento,* può essere immaginaria o reale. Se reale, essa dirime gli elementi lineari, intorno ad O, in due classi: quelli d'una classe si allungano tutti, gli altri si accorciano, poichè ϵ, funzione continua di α, β, γ, non può cambiar segno senza annullarsi quando α, β, γ variano in modo continuo, cioè non è possibile passare dalla regione degli allungamenti a quella degli accorciamenti senza attraversare la superficie conica. Se il cono di scorrimento è immagi-

nario, ciò vuol dire che ϵ conserva sempre lo stesso segno, e però, intorno al punto considerato, gli elementi lineari si allungano tutti o si accorciano tutti.

7. Più generalmente, il luogo degli elementi lineari, che subiscono uno stesso allungamento unitario, è un cono quadrico, perchè la formola (2) si può scrivere così:

$$(a-\epsilon)\alpha^2+(b-\epsilon)\beta^2+(c-\epsilon)\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0. \quad (4)$$

Ad ogni valore di ϵ corrisponde un cono reale o immaginario, e tutti questi coni hanno gli stessi assi del cono di scorrimento. Se immaginiamo che gli assi coordinati siano già stati scelti paralleli agli assi dei coni, l'equazione precedente deve aver la forma

$$(a-\epsilon)\alpha^2+(b-\epsilon)\beta^2+(c-\epsilon)\gamma^2=0, \quad (5)$$

vale a dire che per una particolare scelta di assi debbono esser nulli gli scorrimenti f, g, h. Adunque, *esiste sempre una terna ortogonale di elementi*, ed in generale una sola, *che resta ortogonale dopo la deformazione*. Le rette sulle quali son collocati questi elementi si chiamano le *rette principali*, relative al punto considerato.

8. Perchè l'equazione (5) rappresenti un cono reale è necessario che $a-\epsilon$, $b-\epsilon$, $c-\epsilon$ non abbiano lo stesso segno, e però ϵ è sempre compreso fra la più piccola e la più grande delle quantità a, b, c. Se, per fissare le idee, si suppone $a>b>c$, il minimo valore di ϵ è c, il massimo è a. Per $\epsilon=a$, come per $\epsilon=c$, l'equazione (5) non è soddisfatta da infiniti valori reali di α, β, γ, perchè dev'essere, nel primo caso, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha=1$, e nel secondo $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$. Dunque intorno ad ogni punto *esistono due elementi, che subiscono il minimo ed il massimo allungamento*, e questi elementi *sono sempre fra loro ortogonali*. Quanto agli elementi, che sopportano l'allungamento unitario $\epsilon=b$, essi stanno in una coppia di piani, intersecantisi lungo la terza

retta principale ($\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$). Si noti che, per ciascuno dei tre coefficienti di allungamento, secondo le rette principali, è degenere il cono corrispondente. Dunque, ritornando ad un'arbitraria scelta di assi, i detti coefficienti debbono annullare il discriminante della forma quadratica (4). Essi sono dunque le radici, sempre reali, dell'equazione

$$\begin{vmatrix} a-\epsilon & h & g \\ h & b-\epsilon & f \\ g & f & c-\epsilon \end{vmatrix} = 0\,,$$

cioè

$$\epsilon^3-(a+b+c)\epsilon^2+(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)\epsilon$$
$$-(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0\,.$$

Ancora si osservi che i coefficienti di questa equazione, essendo funzioni delle sole radici, le quali hanno un significato indipendente dalla scelta degli assi, sono anch'essi indipendenti da tale scelta, sono cioè *invarianti*. Ne segue, in particolare, che *la somma dei coefficienti di allungamento di tre elementi ortogonali non varia quando gli elementi, restando fra loro ortogonali, ruotano intorno all'estremità comune*. Fra breve si vedrà che ciò si deve all'importante significato meccanico della somma stessa.

9. Il variare di ϵ si discute anche più facilmente ricorrendo alla seguente rappresentazione geometrica. Sopra ciascun elemento OM si porti una distanza $OP=\dfrac{1}{\sqrt{\pm\epsilon}}$. Le coordinate di P, quando O si assume ad origine, sono

$$x=\frac{\alpha}{\sqrt{\pm\epsilon}}\,,\quad y=\frac{\beta}{\sqrt{\pm\epsilon}}\,,\quad z=\frac{\gamma}{\sqrt{\pm\epsilon}}\,.$$

Sostituendo in (2) si trova che il luogo dei punti P è la superficie rappresentata dall'equazione

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=\pm 1\,. \tag{6}$$

Così vediamo che *il valore assoluto del coefficiente di allungamento varia,* intorno a ciascun punto, *in ragione inversa del quadrato del diametro d'una quadrica,* che ha il centro nel punto considerato, ed è assintotica al cono di scorrimento. Se questo è immaginario, la superficie rappresentativa è un ellissoide. Ciò si vede anche osservando che, in questo caso, ϵ conserva sempre lo stesso segno, dimodochè in (6) il segno del secondo membro è necessariamente quello dei coefficienti a, b, c. Se il cono di scorrimento è reale, bisogna prendere, nel secondo membro di (6), il segno $+$ per una regione dello spazio, ed il segno $-$ per l'altra. Allora la superficie rappresentativa è costituita da due iperboloidi, ad una e due falde, con centro, assi e cono assintotico comuni.

10. Presa, intorno ad O, una *particella*, sia M uno dei punti in essa inclusi. Continuando a tenere l'origine in O, si noti che, nel passaggio da O ad M, lo spostamento u diventa

$$u' = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

È questa un'eguaglianza rigorosamente esatta quando per $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ si mettono i valori che queste funzioni assumono in un punto convenientemente scelto nell'interno del segmento OM; ma, poichè le dette funzioni si suppongono continue, è lecito prenderne i valori nel punto O, trascurando, in u', infinitesimi di ordine superiore. Allora, se si osserva che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = h - r \ , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = g + q \ ,$$

si può anche scrivere la prima delle seguenti formole:

$$\left\{\begin{aligned} u' &= (u + qz - ry) + (ax + hy + gz) = u_1 + u_2 \\ v' &= (v + rx - pz) + (hx + by + fz) = v_1 + v_2 \\ w' &= (w + py - qx) + (gx + fy + cz) = w_1 + w_2 . \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

Gli spostamenti u_1, v_1, w_1 si riferiscono all'ipotesi d'una particella

rigida, sottoposta ad una traslazione (u, v, w) e ad una rotazione (p, q, r). Per riconoscere poi l'indole degli spostamenti u_2, v_2, w_2 basta orientare gli assi secondo le rette principali. Allora $u_2 = ax$, $v_2 = by$, $w_2 = cz$, si hanno cioè semplici dilatazioni secondo gli assi. Questi tre movimenti speciali (traslazione, rotazione, triplice dilatazione) si possono anche riguardare come *consecutivi* se si osserva che, da un punto all'altro della particella, gli spostamenti e le loro derivate subiscono variazioni trascurabili. Adunque *la deformazione d'una particella si può sempre*, a prescindere da un moto rigido, *considerare come risultante di tre dilatazioni secondo le rette principali.*

11. Presto vedremo che la mancanza, in tutte le particelle, del terzo moto componente, che può dirsi moto di *pura* deformazione, caratterizza la rigidità dell'intero sistema. La mancanza del secondo moto componente definisce una speciale deformazione, che dicesi *deformazione potenziale*. Qui si noti che l'annullamento di p, q, r, in tutto il sistema, è necessario e sufficiente perchè $udx + vdy + wdz$ sia un differenziale esatto. Dunque la deformazione potenziale è caratterizzata dall'esistenza d'una funzione, le cui derivate parziali prime forniscono gli spostamenti in ogni punto del sistema. Se, inoltre, a, b, c, f, g, h sono costanti, si ha la deformazione detta *omogenea* da Thomson e Tait (*).

12. Tornando a studiare la deformazione generale d'una particella, osserviamo che, in virtù delle formole (7), le coordinate $x + u'$, $y + v'$, $z + w'$ di M' sono *linearmente* legate a quelle di M, e però ogni elemento piano o rettilineo d'una particella resta piano o rettilineo nella deformazione, e due elementi paralleli restano paralleli, ecc. Dunque, se si considera un *parallelepipedo elementare*, cioè un parallelepipedo costruito, col vertice in O, sugli spigoli dx, dy, dz, paralleli agli assi, esso si trasforma in un altro pa-

(*) *Natural philosophy*, § 190.

rallelepipedo, generalmente obliquangolo, i cui spigoli sono $(1+a)dx$, $(1+b)dy$, $(1+c)dz$, mentre gli angoli piani, intorno ad O, son diventati $\frac{\pi}{2}-2f$, $\frac{\pi}{2}-2g$, $\frac{\pi}{2}-2h$. Fra gli infiniti parallelepipedi elementari, che si possono considerare, un solo resta rettangolo dopo la deformazione. Ce ne serviremo per calcolare il *coefficiente di dilatazione cubica* Θ, cioè il rapporto fra l'aumento del volume della particella ed il volume iniziale dS. Siccome é chiaro che, pel suo significato, Θ è indipendente dalla forma della particella, si può immaginare che questa sia il parallelepipedo elementare costruito sulle rette principali, dimodochè

$$dS = dxdydz \quad , \quad (1+\Theta)dS = (1+a)(1+b)(1+c)dxdydz\,,$$

e però

$$1+\Theta = (1+a)(1+b)(1+c)\,,$$

cioè, trascurando infinitesimi di ordine superiore, $\Theta = a+b+c$; e poichè questa espressione è invariante, si può, per qualunque scelta di assi, scrivere

$$\Theta = a+b+c = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\,. \tag{8}$$

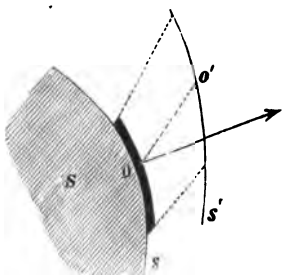
Per dimostrare in altro modo questa importante formola, faremo una breve digressione.

13. Avremo spesso occasione di servirci d'un teorema, che permette di trasformare un integrale esteso ad uno spazio S in un integrale esteso alla sola superficie s, che limita S. La dimostrazione del teorema di cui si tratta è inclusa in quella d'un teorema più generale, che daremo in seguito. Qui ci limitiamo ad enunciare la relazione

$$\int \frac{\partial F}{x}\,dS = -\int F\frac{dx}{dn}\,ds\,, \tag{9}$$

in cui F è una funzione di x, y, z, finita, continua ed uniforme. Inoltre $\frac{dx}{dn}$ rappresenta il coseno dell'angolo che la normale alla superficie s, considerata come *positiva* quando è diretta verso l'*interno* di S, fa con l'asse delle x. Si osservi che le condizioni imposte alla funzione F, indispensabili per la dimostra-

zione del teorema, non sono strettamente necessarie, nel senso che, se qualcheduna di esse viene a mancare, non è impossibile che la formola (9) sussista. Si dimostra, per esempio, che questa formola è valida anche quando F diventa infinita in un punto O, purchè, indicando con r la distanza di O al punto in cui si calcola F, e con μ una costante compresa fra 0 e 2, il prodotto Fr^{μ} si serbi finito nel tendere di r a zero.

14. Ritornando al calcolo di Θ, proponiamoci di valutare la totale dilatazione subìta da S, considerandola come la somma dei volumi che gli elementi superficiali ds generano trasferendosi sulla nuova superficie s'. Preso in ds un punto O, il volume generato da ds è misurato dal prodotto di ds per la projezione dello spostamento OO' sulla normale alla superficie, diretta verso l'*esterno* di S.

Questa projezione è $-u\frac{dx}{dn}-v\frac{dy}{dn}-w\frac{dz}{dn}$, e però la dilatazione totale è data da

$$-\int\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)ds\,,$$

ovvero, adoperando (9), da

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dS\,.$$

Siccome questo calcolo è applicabile a qualunque porzione dello spazio considerato, è chiaro che l'ultimo risultato include la formola (8): basta immaginare lo spazio S ridotto all'unica particella dS. Con maggior rigore si può ragionare come segue. Siccome, per la natura delle deformazioni che ci proponiamo di studiare, Θ è una funzione continua, altrettanto si può dire di

$$\vartheta=\Theta-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Intanto, poichè $\int\Theta dS$ rappresenta manifestamente la dilatazione totale, si ha

$$\int\vartheta dS=0$$

per qualunque porzione dello spazio considerato. Ora, se in un punto si avesse, per esempio, $\vartheta > 0$, si potrebbe intorno ad esso circoscrivere uno spazio, nell'interno del quale si avrebbe sempre, in virtù della continuità, $\vartheta > 0$, dimodochè anche $\int \vartheta dS$, esteso a quello spazio, sarebbe positivo. Ciò non può accadere. È dunque assurdo supporre che la differenza ϑ possa, anche in un punto solo, non essere nulla.

II. LE COMPONENTI DELLA DEFORMAZIONE (*).

1. « *Le condizioni*

$$a=0\ ,\quad b=0\ ,\quad c=0\ ,\quad f=0\ ,\quad g=0\ ,\quad h=0$$

sono necessarie e sufficienti per la rigidità ».

Se il sistema si muove rigidamente, ϵ dev'essere nullo in ogni punto, qualunque sia la direzione (α, β, γ), e però debbono annullarsi identicamente a, b, c, f, g, h. Inversamente dimostreremo che, se le condizioni

$$(1') \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0\ , \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\ , \qquad (1'')$$

$$(2') \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\ , \qquad (2'')$$

$$(3') \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0\ , \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \qquad (3'')$$

sono soddisfatte, le funzioni u, v, w hanno necessariamente la forma caratteristica, già nota dalla Meccanica razionale, degli spostamenti

(*) In un primo studio è utile omettere questo capitolo.

d'un sistema rigido. Derivando (3″) rispetto ad y, ed osservando (2′), si ottiene

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Derivando poi (3″) rispetto a z e (2″) rispetto ad y si ottiene, sommando e tenendo conto di (1″),

$$0=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}.$$

Dunque, osservando (1′),

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Ne segue che $\frac{\partial u}{\partial y}$ è costante. Similmente si dimostra che $\frac{\partial u}{\partial z}$ è costante. Inoltre, a motivo di (1′), u non dipende da x. Dunque

$$u=l+r'y+qz\ ,\quad v=m+p'z+rx\ ,\quad w=n+q'x+py.$$

Le nove costanti si riducono a sei. Infatti, per sostituzione degli ultimi risultati in (1″), (2″), (3″), si ottiene $p+p'=0$, $q+q'=0$, $r+r'=0$. Quindi

$$u=l+qz-ry\ ,\quad v=m+rx-pz\ ,\quad w=n+py-qx.$$

2. « *Una deformazione è pienamente determinata quando se ne conoscono le componenti in tutto il corpo, e si dànno, in un punto, i valori degli spostamenti e tre relazioni lineari fra le derivate prime degli spostamenti* » (*).

Suppongasi, infatti, che alle condizioni enunciate possa soddisfare, non solo un sistema (u', v', w') di spostamenti, ma anche qualche altro sistema (u'', v'', w''), e si considerino gli spostamenti residui

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, p. 8.

$u' - u'' = u$, $v' - v'' = v$, $w' - w'' = w$. Siccome a, b, c, f, g, h hanno valori assegnati in ciascun punto, dev'essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \, , \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \, ,$$

e però, come si è dimostrato precedentemente,

$$u = l + qz - ry \, , \quad v = m + rx - pz \, , \quad w = n + py - qx \, ,$$

dove l, m, n, p, q, r rappresentano quantità costanti in tutto il corpo. Ma in un punto, che si può assumere come origine, u' ed u'', v' e v'', w' e w'' debbono prendere gli stessi valori, cioè u, v, w debbono annullarsi. Dunque $l = m = n = 0$. Ora debbono, in quel punto, essere soddisfatte, tanto da u', v', w', quanto da u'', v'', w'', tre relazioni come la seguente:

$$\alpha_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial w'}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial v'}{\partial z} + \alpha_4 \frac{\partial v'}{\partial y} + \alpha_5 \frac{\partial u'}{\partial z}$$

$$+ \alpha_6 \frac{\partial w'}{\partial x} + \alpha_7 \frac{\partial w'}{\partial z} + \alpha_8 \frac{\partial v'}{\partial x} + \alpha_9 \frac{\partial u'}{\partial y} + \alpha_{10} = 0 \, .$$

Scrivendo la medesima relazione per u'', v'', w'', e sottraendo, si ottiene

$$\alpha_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_6 \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_8 \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_9 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \, ,$$

cioè, con altre due relazioni analoghe,

$$(\alpha_2 - \alpha_3)p + (\alpha_5 - \alpha_6)q + (\alpha_8 - \alpha_9)r = 0 \, ,$$
$$(\beta_2 - \beta_3)p + (\beta_5 - \beta_6)q + (\beta_8 - \beta_9)r = 0 \, ,$$
$$(\gamma_2 - \gamma_3)p + (\gamma_5 - \gamma_6)q + (\gamma_8 - \gamma_9)r = 0 \, .$$

Se, come si suppone, queste relazioni sono fra loro distinte, esse non possono coesistere senza che sia $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, e conseguentemente $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, cioè $u' = u''$, $v' = v''$, $w' = w''$.

3. Il teorema precedente si può applicare alla deformazione omogenea. Per questa si conoscono i valori *costanti* di a, b, c, f, g, h, e si dànno tre relazioni, che definiscono l'assenza di rotazione, cioè

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\,. \tag{1}$$

Se, inoltre, fissiamo un punto, assumendolo come origine, dovrà essere $u=v=w=0$ per $x=y=z=0$. Possiamo attribuire ad u, v, w espressioni arbitrarie, per abbandonarle poi se con esse non è possibile soddisfare alle condizioni imposte; ma, se arriviamo a far sì che queste condizioni siano soddisfatte, le espressioni trovate sono *le sole possibili*. Nel caso attuale dev'essere

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=b\,,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=c\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=2f\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=2g\,,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2h\,,$$

e si vede subito che a queste condizioni, ed alle altre $u=v=w=0$ per $x=y=z=0$, si soddisfa prendendo

$$u=ax+hy+gz\,,\quad v=hx+by+fz\,,\quad w=gx+fy+cz\,,$$

dimodochè vengono ad essere soddisfatte anche le (1), non solo nell'origine, ma in tutto lo spazio. La linearità delle ultime formole mostra che i piani e le rette del sistema restano piani e rette. Ciò non accade nelle deformazioni più generali; ma si può dire che, prescindendo dai moti rigidi, ogni deformazione è omogenea *in ciascheduna particella*, variando solo le *costanti* della deformazione da una particella all'altra.

4. Ogni deformazione è caratterizzata da un particolare sistema di funzioni a, b, c, f, g, h. Inversamente, prese ad arbitrio queste funzioni, corrispondono esse ad una deformazione possibile? Dalle formole di definizione si deduce subito

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Similmente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right).$$

Dunque le condizioni

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial h}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\right) & , & \dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial h}{\partial z}\right) & , & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) \end{array}\right\} \quad (3)$$

sono necessarie per l'esistenza di u, v, w. Sono esse sufficienti?

5. Ecco in qual modo il prof. Beltrami dimostra (*) che *le condizioni* (2) *e* (3) *sono necessarie e sufficienti perchè* a, b, c, f, g, h *possano rappresentare le componenti d'una deformazione.* Supponiamo date, oltre alle sei funzioni predette, le tre componenti della rotazione. Si deve avere

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a & , & \dfrac{\partial v}{\partial x} = h + r & , & \dfrac{\partial w}{\partial x} = g - q \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = h - r & , & \dfrac{\partial v}{\partial y} = b & , & \dfrac{\partial w}{\partial y} = f + p \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = g + q & , & \dfrac{\partial v}{\partial z} = f - p & , & \dfrac{\partial w}{\partial z} = c. \end{array}\right. \quad (4)$$

Consideriamo le tre equazioni che si riferiscono ad u. È noto che,

(*) *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (Nota in fondo; *Memorie di Bologna*, 1886).

per l'esistenza d'una funzione u, soddisfacente alle dette equazioni, è necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial(h-r)}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial a}{\partial z}=\frac{\partial(g+q)}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial(g+q)}{\partial y}=\frac{\partial(h-r)}{\partial z}. \qquad (5)$$

Considerando le altre due equazioni, analoghe all'ultima delle (5), si ha

$$\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial y}\;,\quad \frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\;;$$

poi, sommando,

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0,$$

e le ultime tre relazioni diventano

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Quindi, tenendo conto delle (5),

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\;, & \frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\;, & \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\;, & \frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\;, & \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\;, & \frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\;, & \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y} \end{array}\right. \qquad (6)$$

Queste sono condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di u, v, w, quando si dànno $a, b, c, f, g, h, p, q, r$. È poi noto che, per l'integrabilità delle (6), sono necessarie e sufficienti, per ciò che riguarda p, le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\;,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right),$$

che si possono scrivere così:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

Con ciò vediamo che le relazioni (2) e (3) sono appunto le condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità delle (6). Quando esse sono soddisfatte, esistono le funzioni p, q, r, soddisfacenti alle (6), e però esistono anche u, v, w.

6. Un'altra dimostrazione, egualmente dovuta al prof. Beltrami (*), si ottiene tentando l'effettiva integrazione delle (2) e delle (3), considerate come equazioni alle derivate parziali del terzo ordine in u, v, w. Si possono sempre trovare tre funzioni U, V, W, tali che sia

$$a = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

La prima delle (2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right) = 0, \tag{7}$$

e la prima delle (3)

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(f - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right) = 0. \tag{8}$$

Posto

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + f',$$

dev'essere, per le (8),

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 g'}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0, \tag{9}$$

(*) *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo* (t. III, 1889, Note fisico-matematiche).

e per le (7), osservando prima che

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

dev'essere ancora

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}\right)=0.$$

In altri termini, $\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}$ è indipendente da x, e però si può rappresentare come derivata seconda rispetto ad y e z d'una funzione U_x di y e z. Poniamo dunque

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}=\frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z},\\
&\frac{\partial h'}{\partial z}+\frac{\partial f'}{\partial x}-\frac{\partial g'}{\partial y}=\frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x},\\
&\frac{\partial f'}{\partial x}+\frac{\partial g'}{\partial y}-\frac{\partial h'}{\partial z}=\frac{\partial^2 W_z}{\partial x \partial y},
\end{aligned}\right.$$

essendo V_y indipendente da y, e W_z indipendente da z. Le ultime due relazioni, sommate, dànno

$$\frac{\partial f'}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x}+\frac{\partial^2 W_z}{\partial x \partial y}\right),$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f'-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\right)=0.$$

Per conseguenza possiamo porre

$$f'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+f'',$$

indicando con f'', g'', h'' funzioni soddisfacenti alle equazioni

$$\frac{\partial f''}{\partial x}=0 \ , \quad \frac{\partial g''}{\partial y}=0 \ , \quad \frac{\partial h''}{\partial z}=0 \ , \tag{10}$$

ed alle altre che si deducono dalle (9):

$$\frac{\partial^2 f''}{\partial y \partial z}=0 \ , \quad \frac{\partial^2 g''}{\partial z \partial x}=0 \ , \quad \frac{\partial^2 h''}{\partial x \partial y}=0 . \tag{11}$$

Le condizioni (10) e (11) mostrano che f'' è la somma di due funzioni, una della sola y, l'altra della sola z. La prima possiamo sempre rappresentarla come derivata d'una funzione $\frac{1}{2} W_y$ della sola y, e l'altra come derivata d'una funzione $\frac{1}{2} V_z$ della sola z. In altri termini possiamo porre

$$f''=\frac{1}{2}\left(\frac{dW_y}{dz}+\frac{dV_z}{dy}\right) .$$

Dunque, riassumendo,

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{dW_y}{dy}+\frac{dV_z}{dz}\right) ,$$

ovvero

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(W+W_z+W_y)+\frac{\partial}{\partial z}(V+V_y+V_z)\right] ,$$

$$g=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(U+U_x+U_z)+\frac{\partial}{\partial x}(W+W_z+W_x)\right] ,$$

$$h=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(V+V_y+V_x)+\frac{\partial}{\partial y}(U+U_x+U_y)\right] .$$

Ora, osservando che dev'essere

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \ , \quad g=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \ , \quad h=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) ,$$

si vede che si può prendere

$$
\begin{aligned}
u &= U + U_x + U \; + U_z \ , \\
v &= V + V_x + V_y + V_z \ , \\
w &= W + W_x + W_y + W_z \ ,
\end{aligned}
$$

giacchè in tal modo sono anche soddisfatte le relazioni

$$
a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad b = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad c = \frac{\partial w}{\partial z} \, .
$$

7. Alla prima dimostrazione si riannodano eleganti considerazioni del Prof. Beltrami (*), con le quali si mostra che le condizioni (2) e (3) si riassumono in un'eguaglianza unica, ponendo uguale a zero una certa parte δJ della variazione subìta dall'integrale

$$
J = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r} \right) dp\, dq\, dr \tag{12}
$$

quando ad a, b, c, f, g, h, si attribuiscono variazioni arbitrarie $\delta a, \delta b, \delta c, \delta f, \delta g, \delta h$. Prima esprimiamo J nelle variabili x, y, z. Il determinante funzionale

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix} ,
$$

è diverso da zero. Infatti le funzioni p, q, r sono fra loro indipendenti, benchè fra le derivate sussista il vincolo

$$
\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \, . \tag{13}
$$

Ciò premesso, dalle relazioni

$$
\left\{
\begin{aligned}
dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \ , \\
dq &= \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy + \frac{\partial q}{\partial z} dz \ , \\
dr &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \ ,
\end{aligned}
\right.
$$

(*) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1889, p. 502).

si deduce

$$\Delta . dx = \begin{vmatrix} dp & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ dq & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ dr & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Essendo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial r} dr ,$$

si ottiene, uguagliando i coefficienti di dp nei due membri di (14),

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} ;$$

poi

$$\Delta \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} \right).$$

Dunque, sostituendo in (12), e rappresentando, secondo il solito, con dS l'elemento di spazio $dxdydz$,

$$J = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \ldots \right] dS . \tag{15}$$

8. Cerchiamo di trasformare J in integrale di superficie. Si ha

$$\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \left(r \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial z} - q \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} \right) .$$

Similmente

$$\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(q \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} - r \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial z} \right) .$$

Dunque, sommando,

$$2 \left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial r}{\partial y} \right) ;$$

poi, sostituendo in (15), e raccogliendo i termini derivati rispetto ad x,

$$J = \frac{1}{4} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \ldots \right] dS . \tag{16}$$

D'altronde si ha, in virtù di (13),

$$p\frac{\partial r}{\partial z}-r\frac{\partial p}{\partial z}+p\frac{\partial q}{\partial y}-q\frac{\partial p}{\partial y}=-\left(p\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial p}{\partial y}+r\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Ora, se indichiamo con $d\sigma$ l'elemento lineare collocato sull'asse di rotazione (p, q, r), dimodochè

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{d\sigma}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

possiamo anche dare, all'espressione precedente, la forma

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}\right)\sqrt{p^2+q^2+r^2}=-\frac{dp}{d\sigma}\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

e così, sostituendo in (16), e facendo uso della formola (10) del precedente capitolo, si ottiene

$$J=\frac{1}{4}\int\left(\frac{dp}{d\sigma}\frac{dx}{dn}+\frac{dq}{d\sigma}\frac{dy}{dn}+\frac{dr}{d\sigma}\frac{dz}{dn}\right)\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,ds.$$

9. L'ultimo risultato non ha importanza per noi. Deve soltanto interessarci la possibilità di trasformare J in integrale di superficie, dobbiamo cioè constatare che J è *solo in apparenza* un integrale triplo, mentre in realtà è un integrale doppio. Ne segue che quella parte della sua variazione δJ che non si riduce ad integrale di superficie deve per necessità essere nulla identicamente. Intanto si è visto che, ammessa l'esistenza di p, q, r insieme a quella di a, b, c, f, g, h, le relazioni (6) sono sufficienti e necessarie per l'esistenza di u, v, w. Per mezzo di esse l'espressione sottoposta al segno di integrazione, in (15), diventa

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Ora suppongasi che ad a, b, c, f, g, h si diano variazioni arbitrarie, e si tenti di porre la variazione che ne risulta per J sotto la forma

$$\delta J=\int(\mathfrak{A}\delta a+\mathfrak{B}\delta b+\mathfrak{C}\delta c+\mathfrak{F}\delta f+\mathfrak{G}\delta g+\mathfrak{H}\delta h)\,dS,$$

a prescindere da integrali di superficie. Facendo variare la sola a si ottiene

$$\delta J=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta a}{\partial y}+\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\delta a}{\partial z}\right]dS,$$

cioè, integrando per parti,

$$\delta J = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta a\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta a\right\}\right]dS$$

$$-\frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\delta a dS .$$

La prima parte è riducibile ad integrale doppio mediante la formola (10) del capitolo precedente, e la seconda parte è l'espressione di $\int \mathfrak{A}\delta a dS$. Dunque

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right).$$

Operando analogamente per f si ottiene prima

$$\delta J = \frac{1}{2}\int\left[-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \delta f}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial \delta f}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial \delta f}{\partial y}+\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta f}{\partial z}\right]dS ;$$

poi, integrando per parti,

$$\delta J = \frac{1}{2}\int\left[-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta f\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\delta f\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)\delta f\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\delta f\right\}\right]dS$$

$$-\frac{1}{2}\int\left[-2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right]\delta f dS .$$

Trascurando la prima parte, che in realtà è un integrale doppio, e paragonando la seconda a $\int \mathfrak{F}\delta f dS$, si ottiene

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 a}{\partial y\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Abbiamo così

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right) , & \mathfrak{F} &= \frac{\partial^2 a}{\partial y\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right) ,\\
\mathfrak{B} &= \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right) , & \mathfrak{G} &= \frac{\partial^2 b}{\partial z\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right) ,\\
\mathfrak{C} &= \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) , & \mathfrak{H} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right) ,
\end{aligned}\right.$$

e vediamo che le funzioni $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$, il cui simultaneo annullamento è sufficiente e (data l'arbitrarietà di $\delta a, \delta b, \delta c, \delta f, \delta g, \delta h$) necessario per l'annullamento identico di δJ, sono appunto quelle che, poste uguali a zero, forniscono le condizioni sufficienti e necessarie perchè a, b, c, f, g, h siano le componenti d'una deformazione possibile.

III. IL POTENZIALE DELLE FORZE ELASTICHE.

1. L'esperienza insegna che i corpi della natura, sottoposti a forze convenientemente piccole, si deformano, ma riprendono la forma primitiva tostochè cessi l'azione delle forze deformatrici. Ciò si esprime dicendo che la deformazione dà origine a *forze elastiche*, le quali tendono a ricondurre i punti del corpo nelle loro antiche posizioni. In questo ritorno ad uno stato di *equilibrio stabile* intervengono unicamente le forze elastiche, ed è noto dalla Meccanica razionale che in un sistema equilibrato, soggetto a forze che dipendono solo dalle posizioni relative dei punti del sistema, quali sono le forze elastiche, il *potenziale* o lavoro eseguito dalle forze è un *massimo* o un *minimo* secondo che l'equilibrio è *stabile* o *instabile*. Si sa inoltre che questo lavoro non può dipendere dalle infinite configurazioni che va prendendo il sistema per raggiungere l'equilibrio, ma dipende soltanto dalle configurazioni iniziale e finale. E però, se con ΠdS rappresentiamo il potenziale relativo alla particella dS, potremo asserire che Π dipende soltanto da quelle quantità che caratterizzano le configurazioni estreme della particella, cioè, computando il lavoro a partire dalla configurazione di equilibrio, Π sarà funzione delle quantità a, b, c, f, g, h, che caratterizzano la pura deformazione, giacchè, nei moti rigidi della particella, le forze elastiche non fanno lavoro. Adoperando una nota formola, e rappresentando in generale con φ_θ ciò che la funzione φ di a, b, c, f, g, h diventa, quando le variabili si moltipli-

cano pel numero positivo θ, inferiore all'unità, potremo esprimere il potenziale unitario Π nel seguente modo:

$$\Pi = \Pi_0 + a\left(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\right)_0 + b\left(\frac{\partial\Pi}{\partial b}\right)_0 + \ldots + h\left(\frac{\partial\Pi}{\partial h}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[a^2\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\right)_\theta + 2ab\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\right)_\theta + \ldots + h^2\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial h^2}\right)_\theta\right].$$

Per convenzione $\Pi_0 = 0$. Inoltre, poichè la funzione Π ha valore massimo per a, b, c, f, g, h evanescenti, dev'essere *nulla* la sua prima variazione, *negativa* la variazione seconda. Finalmente, quando φ è continua, si può ad ogni φ_θ sostituire φ_0, trascurando quantità piccolissime, dell'ordine di a, b, c, f, g, h. Dunque Π *è una forma quadratica, essenzialmente negativa, delle componenti della deformazione*. Segnaliamo fin d'ora l'altissima importanza che ha il potenziale unitario Π in tutta questa teoria: « esso ha l'insigne proprietà di rappresentare l'*energia,* riferita all'unità di volume, che il corpo elastico possiede nell'intorno del punto che si considera, energia la quale è equivalente sia al lavoro che l'unità di volume del corpo può svolgere nel restituirsi dallo stato attuale allo stato naturale, sia al lavoro che hanno dovuto svolgere le forze esterne per condurre la detta unità di volume dallo stato naturale all'attuale suo stato di coazione elastica » (*).

2. Se nell'espressione di Π mettiamo in evidenza i termini che contengono soltanto a, b, c, o soltanto f, g, h, possiamo scrivere

$$\Pi = -\frac{1}{2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'bc + 2B'ca + 2C'ab)$$
$$-2(Ff^2 + Gg^2 + Hh^2 + 2F'gh + 2G'hf + 2H'fg)$$
$$-2a(F_1 f + G_1 g + H_1 h) - 2b(F_2 f + G_2 g + H_2 h) - 2c(F_3 f + G_3 g + H_3 h).$$

Se il mezzo è omogeneo, i coefficienti $A, B, \ldots, H_3$ sono costanti

(*) BELTRAMI, *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici* (Rendiconti dell'Istituto lombardo, 11 Giugno, 1885).

in tutto il corpo, purchè non si abbiano variazioni di temperatura, come si è finora tacitamente supposto e si continuerà a supporre. Si osservi che, nel caso più generale, queste costanti, o *coefficienti di elasticità*, sono *ventuno*. Rankine (*) le distingue con le seguenti denominazioni:

A, B, C: elasticità *dirette*

F, G, H: » *tangenziali* o *di rigidità*

A', B', C': » *laterali*

$F', G', H'; F_1, G_1, H_1; F_2, G_2, H_2; F_3, G_3, H_3$: elasticità *asimmetriche*.

Se il mezzo è dotato, per ciò che riguarda l'elasticità, d'un *piano di simmetria*, ciò vuol dire che Π non varia nella forma quando, preso il detto piano per piano delle yz, si cambia x in $-x$. Questo cambiamento trae con sè il cambiamento di u in $-u$, e quindi di g ed h in $-g$ e $-h$, mentre a, b, c, f restano inalterati. Dunque deve aversi

$$G' = G_1 = G_2 = G_3 = 0 \quad , \quad H' = H_1 = H_2 = H_3 = 0 .$$

Se il mezzo è dotato di due piani ortogonali di simmetria, sono nulle *tutte* le elasticità asimmetriche. Ciò svela l'esistenza necessaria d'un terzo piano di simmetria, perpendicolare ai primi due. In tal caso il potenziale unitario assume la forma semplicissima

$$\Pi = -\frac{1}{2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'bc + 2B'ca + 2C'ab) - 2(Ff^2 + Gg^2 + Hh^2). \quad ($$

3. Se, invece d'un piano, si ha un *asse di simmetria*, il mezzo dicesi dotato d'*isotropia* intorno a questo asse. È noto (**) che, se

(*) *On axes of Elasticity and crystallin Forms* (R. Società di Londra, 21 Giugno, 1855).

(**) Per la dimostrazione basta osservare che, se la condizione di ortogonalità

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

si conserva quando i coseni $\lambda, \lambda', \ldots$ variano di $\delta\lambda, \delta\lambda', \ldots$, si ha

$$\Sigma\lambda\delta\lambda' + \Sigma\lambda'\delta\lambda = 0 \ , \quad \text{ovvero} \quad \Sigma\lambda(\lambda' + \delta\lambda') + \Sigma\lambda'(\lambda + \delta\lambda) = 0 \ ,$$

vale a dire $\cos(xy') = -\cos(x'y)$; ecc.

si spostano infinitamente poco tre assi ortogonali intorno all'origine, in modo che restino ortogonali, i coseni direttori dei nuovi assi si possono rappresentare nel seguente modo:

	x'	y'	z'
x	1	γ	$-\beta$
y	$-\gamma$	1	α
z	β	$-\alpha$	1

Gli angoli α, β, γ sono infinitesimi, e si suppone che si trascurino gli infinitesimi di ordine superiore. Intanto le formole (2) e (3) del primo capitolo forniscono i nuovi valori di a, b, c, f, g, h. Esse mostrano che le variazioni subìte da queste quantità sono

$$\begin{aligned} \delta a &= 2(g\beta - h\gamma) \;, & \delta f &= (b-c)\alpha - h\beta + g\gamma \\ \delta b &= 2(h\gamma - f\alpha) \;, & \delta g &= h\alpha + (c-a)\beta - f\gamma \\ \delta c &= 2(f\alpha - g\beta) \;, & \delta h &= -g\alpha + f\beta + (a-b)\gamma. \end{aligned}$$

Ne segue, adoperando (1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\Pi = &-(g\beta - h\gamma)(Aa + C'b + B'c) - 2[(b-c)\alpha - h\beta + g\gamma]Ff \\ &-(h\gamma - f\alpha)(C'a + Bb + A'c) - 2[h\alpha + (c-a)\beta - f\gamma]Gg \\ &-(f\alpha - g\beta)(B'a + A'b + Cc) - 2[-g\alpha + f\beta + (a-b)\gamma]Hh \,, \end{aligned}$$

ovvero, ordinando tutto rispetto ad α, β, γ,

$$\frac{1}{2}\delta\Pi = -\sum \Big\{ [(B'-C')a + (A'-B)b + (C-A')c + 2(b-c)F]f + 2(G-H)gh \Big\} \alpha.$$

Se prendiamo l'asse d'isotropia come asse delle x, Π deve rimanere invariato quando il piano delle yz gira su sè stesso intorno all'origine. Bisogna dunque che, per $\beta = \gamma = 0$, si abbia identicamente $\delta\Pi = 0$, cioè

$$B' = C' \;,\quad G = H \;,\quad B - A' = C - A' = 2F.$$

Nel caso di due assi ortogonali d'isotropia si ha

$$A = B = C \quad , \quad A' = B' = C' \quad , \quad F = G = H \quad , \quad A - A' = 2F \, ;$$

ma allora $\delta\Pi$ è identicamente nullo, qualunque sia la terna di valori attribuiti ad α, β, γ. Il mezzo è dunque pienamente *isotropo*, cioè le sue proprietà elastiche si manifestano con eguale intensità in tutte le direzioni. Intanto, se per introdurre la segnatura abituale, proposta da Green, si cambia F in B, osservando che $A' = A - 2B$, la formola (1) diventa

$$\Pi = -\frac{1}{2} A (a + b + c)^2 - 2B(f^2 + g^2 + h^2 - bc - ca - ab) \, ,$$

ovvero (*)

$$\Pi = -\frac{1}{2}(A - 2B)(a + b + c)^2 - B(a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2).$$

I coefficienti A e B sono le *costanti d'isotropia*, variabili da un mezzo all'altro.

4. Un più elegante modo di trovare la speciale forma che Π assume nel caso dell'isotropia incompleta, o simmetria elastica rispetto ad un asse, è stato dal prof. Beltrami esposto nelle « *Note fisico-matematiche* ». Si è visto nel § 8 del primo capitolo che le funzioni

$$a + b + c \, , \quad bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2 \, , \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

hanno un significato indipendente dalla scelta degli assi. Ora, prendendo come asse delle x l'asse di simmetria, se si fa ruotare il piano delle yz su sè stesso, intorno all'origine, a resta invariato, ma è sempre arbitrario, e però debbono rimanere separatamente invariate, in ogni funzione invariante di a, b, c, f, g, h, la parte che contiene a e quella che non contiene a. Dunque, osservando

(*) Vedi nella *Teoria della elasticità* del Prof. Betti, alla fine del secondo capitolo, l'interpretazione meccanica di $a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2$.

che le espressioni invarianti, ottenute precedentemente, si possono scrivere nel seguente modo

$$a+(b+c)\ ,\quad a(b+c)+(bc-f^2-g^2-h^2)\ ,$$
$$a(bc-f^2)+(2fgh-bg^2-ch^2)\ ,$$

si vede che rimangono invariate le espressioni

$$a\ ,\quad b+c\ ,\quad bc-f^2-g^2-h^2\ ,\quad bc-f^2\ ,\quad 2fgh-bg^2-ch^2\ ,$$

ovvero

$$a^2\ ,\quad a(b+c)\ ,\quad (b+c)^2\ ,\quad f^2-bc\ ,\quad g^2+h^2\ ,$$

tralasciando l'ultima, che non può entrare nell'espressione di Π. Questa è infatti del secondo grado, e si può tentare di scriverla così:

$$-\Pi=Aa^2+Ba(b+c)+C(b+c)^2+D(f^2-bc)+E(g^2+h^2). \quad (2)$$

Poi si può ritenere che questa sia l'espressione generale di Π, appena si osservi che contiene *cinque* coefficienti arbitrarii, e che d'altra parte l'espressione di Π, nel caso considerato, non può racchiudere più di cinque coefficienti. Infatti i *nove* coefficienti trovati nel caso che il mezzo sia dotato di tre piani ortogonali di simmetria si riducono già a *sei* quando si suppone soltanto che si possano scambiare fra loro due assi. È poi chiaro che ogni ulteriore particolarizzazione deve apportare qualche riduzione nel numero dei coefficienti di elasticità, numero che, per conseguenza, non può essere maggiore di cinque. Si passa poi all'espressione del potenziale, pel caso dei mezzi pienamente isotropi, rendendo l'espressione (2) simmetrica rispetto ad a, b, c e ad f, g, h. Si ottiene

$$A=C\ ,\quad D=E\ ,\quad B=2C-D\ ,$$

e si ricade sulle formole del precedente paragrafo cambiando A e C in $\frac{1}{2}A$, D ed E in $2B$, e B in $A-2B$.

5. I coefficienti di elasticità sono soggetti a limitazioni, imposte

dal carattere essenzialmente positivo della forma $-\Pi$. Siccome il discriminante di questa forma è

$$\frac{1}{64}\begin{vmatrix} 4B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & A-2B & A-2B \\ 0 & 0 & 0 & A-2B & A & A-2B \\ 0 & 0 & 0 & A-2B & A-2B & A \end{vmatrix},$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè a qualunque sistema di valori delle variabili corrisponda un valore positivo di $-\Pi$ sono, per un noto teorema di Algebra,

$$B>0\,,\ A>0\,,\ \begin{vmatrix} A & A-2B \\ A-2B & A \end{vmatrix}>0\,,\ \begin{vmatrix} A & A-2B & A-2B \\ A-2B & A & A-2B \\ A-2B & A-2B & A \end{vmatrix}>0\,,$$

cioè

$$B>0\ ,\quad A>0\ ,\quad A-B>0\ ,\quad 3A-4B>0\ ,$$

e si riducono alla prima ed all'ultima, perchè, soddisfatte queste due, le altre restano soddisfatte *a fortiori*. Dunque *le costanti dell'isotropia,* A *e* B, *sono necessariamente positive, ed inoltre la prima supera i quattro terzi della seconda.* Sotto altra forma queste limitazioni, che hanno importanza in certe ricerche (*), sono state date da Green (**) e dimostrate da Beltrami (***) nel modo semplicissimo che qui appresso si espone.

6. Ogni sistema di valori *costanti* di a, b, c, f, g, h corrisponde (II, 4) ad una deformazione possibile. Supponendo $f=g=h=0$, il potenziale unitario si riduce a $-B(a^2+b^2+c^2)$ se $a+b+c=0$,

(*) Beltrami, *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell.*
(**) *Mathematical Papers*, pp. 246, 330.
(***) *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici* (Rend. Istituto lombardo, 1885).

ed a $-\frac{3}{2}(3A-4B)$ se $a=b=c=1$. Si ritrovano così le condizioni

$$B>0 \quad , \quad 3A-4B>0 \tag{3}$$

come *necessarie*. Per dimostrare che sono anche *sufficienti* basta mettere in evidenza il carattere essenzialmente negativo di Π, ed a ciò si perviene mediante una semplicissima trasformazione algebrica. Proponiamoci di determinare un numero reale k, in modo che sia

$$\Pi=-B[(a-k\Theta)^2+(b-k\Theta)^2+(c-k\Theta)^2+2f^2+2g^2+2h^2].$$

Paragonando con

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)\Theta^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2)$$

si vede che dev'essere

$$\frac{1}{2}(A-2B)=B(3k^2-2k)\ ,$$

e se ne deduce

$$k=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3A-4B}{2B}}\ .$$

Quando le condizioni (3) sono soddisfatte, k è reale, e $-\Pi$ resta espresso mediante una somma di quadrati. Inoltre vien messo in evidenza il fatto che per l'annullamento di Π è necessario e sufficiente l'annullamento simultaneo di a, b, c, f, g, h, giacchè da $a-k\Theta=b-k\Theta=c-k\Theta=0$ si deduce successivamente

$$\Theta-3k\Theta=0\ ,\quad \Theta=0\ ,\quad a=b=c=0.$$

IV. EQUILIBRIO ELASTICO.

1. Quando ad un corpo elastico si applica un sistema di forze, i punti del corpo si spostano, ed in conseguenza variano le azioni interne, che cessano così di farsi equilibrio e tendono invece ad equilibrarsi con le forze esterne. Nel raggiungere il nuovo equilibrio il corpo acquista una forma definitiva, che non abbandona se non quando, soppresse le forze esterne, tendono nuovamente le forze interne ad equilibrarsi fra loro. Ciò premesso, conoscendo le azioni deformatrici cui è sottoposto un corpo dato, ci proponiamo di determinare la nuova distribuzione delle azioni interne e la configurazione finale del corpo.

2. **Equazioni dell'equilibrio elastico.** Siano X, Y, Z le componenti, *per unità di volume*, secondo tre assi ortogonali, della forza applicata alla particella dS. In altri termini siano XdS, YdS, ZdS le componenti della forza applicata alla massa contenuta in dS. Oltre a queste forze, che diconsi *forze di massa*, si possono avere *pressioni* alla superficie del corpo. Siano Lds, Mds, Nds le componenti della pressione applicata all'elemento superficiale ds. Quando il corpo, deformandosi, ha raggiunto una configurazione definitiva, i suoi punti trovansi in equilibrio sotto l'azione di tre gruppi di forze: 1° forze di massa; 2° pressioni alla superficie; 3° forze elastiche. In virtù del *principio di Lagrangia* dev'essere nullo il lavoro fatto da tutte queste forze nei moti virtuali che il sistema può eseguire intorno alla configurazione di equilibrio. Così per ogni punto, già venuto dalla posizione (x, y, z) alla posizione $(x+u, y+v, z+w)$, si ha, nel passaggio virtuale alla posizione $(x+u+\delta u, y+v+\delta v, z+w+\delta w)$, un lavoro elementare, espresso da $\xi\delta u+\eta\delta v+\zeta\delta w$ se ξ, η, ζ sono le componenti della forza applicata al punto considerato. Quanto alle forze ela-

stiche, il lavoro da esse eseguito non è che la variazione subìta dal loro potenziale durante il moto virtuale. Il principio dei momenti virtuali conduce dunque all'equazione

$$\int(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dS+\int(L\delta u+M\delta v+N\delta w)ds+\delta\int\Pi dS=0. \quad (1)$$

Ora svincoleremo nel terzo integrale le arbitrarie $\delta u, \delta v, \delta w$, in modo da farle comparire linearmente, come nei primi due integrali; poi, osservando che queste quantità sono fra loro indipendenti, e variabili arbitrariamente da punto a punto, eguaglieremo a zero i loro coefficienti negli integrali di spazio ed in quelli di superficie, separatamente. Perverremo così alle equazioni domandate. Anzitutto si ha, ricordando che Π è funzione di a, b, c, f, g, h,

$$\delta\int\Pi dS=\int\delta\Pi dS=\int\left(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta a+\frac{\partial\Pi}{\partial b}\delta b+\ldots+\frac{\partial\Pi}{\partial h}\delta h\right)dS.$$

Intanto

$$\int\frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta a dS=\int\frac{\partial\Pi}{\partial a}\frac{\partial\delta u}{\partial x}dS=\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta u\right)dS-\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta u dS$$
$$=-\int\frac{\partial\Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn}\delta u ds-\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta u dS.$$

Similmente

$$\int\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta f dS=\int\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial z}\right)dS$$
$$=\int\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta w\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta v\right)\right]dS-\int\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta w+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta v\right)dS$$
$$=-\int\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\left(\frac{dy}{dn}\delta w+\frac{dz}{dn}\delta v\right)ds-\int\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta w+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\delta v\right)dS.$$

Dunque, raccogliendo in tre gruppi analoghi i termini che moltiplicano $\delta u, \delta v, \delta w$,

$$\delta\int\Pi dS=-\int\left(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn}\right)\delta u ds$$
$$-\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial a}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial h}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial g}\right)\delta u dS$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sostituendo finalmente nella relazione (1), questa si scinde, per l'arbitrarietà di $\delta u, \delta v, \delta w$, nelle sei equazioni seguenti:

$$
(1')\left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g} \\
Y &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial f} \\
Z &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial c}
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left.
\begin{aligned}
L &= \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn} \\
M &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dz}{dn} \\
N &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{dz}{dn}
\end{aligned}
\right\}(1'')
$$

3. **Osservazioni.** Le relazioni (1') diconsi *equazioni indefinite*, perchè valgono in ciascun punto del corpo. Le relazioni (1''), che son valide soltanto in superficie, diconsi *equazioni ai limiti*. Veramente le condizioni ai limiti si possono imporre in infiniti modi. Esse sono espresse dalle relazioni (1'') quando in superficie si dànno le *pressioni*. Se invece si assegnano i valori che gli *spostamenti* debbono assumere in superficie, le equazioni ai limiti sono appunto le uguaglianze mediante le quali si fissano i detti valori. Quale uso faremo delle equazioni indefinite e delle equazioni ai limiti? Si osservi che $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots$ sono funzioni lineari di $a, b, c, \ldots$, e che però contengono linearmente le derivate prime degli spostamenti. Le derivazioni ulteriori di $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots$, accennate nelle equazioni (1'), faranno poi comparire le derivate seconde di u, v, w. Adunque le equazioni indefinite sono equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Integrandole si otterranno le espressioni di u, v, w, contenenti quantità arbitrarie, le quali verranno determinate mediante sostituzione nelle equazioni ai limiti. Ma qui sorge un dubbio. Basteranno sempre le equazioni indefinite per individuare un sistema di spostamenti, e le equazioni ai limiti per completarne la determinazione?

4. Rispondiamo subito, dimostrando che, *a prescindere da moti rigidi, le equazioni indefinite e le equazioni ai limiti sono sufficienti per la determinazione degli spostamenti.* Supposto che esi-

stano due sistemi di spostamenti, (u', v', w') ed (u'', v'', w''), soddisfacenti alle equazioni (1'), si considerino gli spostamenti

$$u' - u'' = u \ , \quad v' - v'' = v \ , \quad w' - w'' = w .$$

È chiaro che $a' - a'' = a$, $b' - b'' = b$, ecc.... Inoltre, osservando che $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots$ contengono linearmente $a, b, c, \ldots$ si ha $\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} - \frac{\partial \Pi''}{\partial a''} = \frac{\partial \Pi}{\partial a}$, ecc. Scritte le equazioni (1') per ciascun sistema di spostamenti, si ottiene, sottraendo,

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g} \\ 0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial f} \\ 0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial c} \end{array}\right.$$

Queste sono appunto le equazioni indefinite dell'equilibrio, nell'ipotesi che le forze di massa siano nulle. Operando analogamente sulle equazioni ai limiti, si trovano le equazioni (1''), in cui $L = L' - L''$, ecc. Dunque u, v, w si possono considerare come spostamenti dovuti alle forze

$$X = Y = Z = 0 \ , \ L = L' - L'' \ , \ M = M' - M'' \ , \ N = N' - N'' .$$

Ora, se prendiamo $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$ nell'uguaglianza (1), questa diventa

$$\int (Lu + Mv + Nw)\, ds + 2\int \Pi dS = 0 \ , \tag{2}$$

perchè, in virtù del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a + \ldots = 2\Pi .$$

Se per condizioni ai limiti si assegnano le *pressioni*, vuol dire che $L' = L''$, ecc., cioè $L = M = N = 0$. Se invece si dànno gli *spo-*

stamenti in superficie, vuol dire che sopra s dev'essere $u'=u''$, ecc., cioè $u=v=w=0$. Dunque in ogni caso è nullo il primo integrale dell'eguaglianza (2), e questa si riduce a

$$\int \Pi dS = 0 .$$

Il primo membro è una somma di quantità essenzialmente negative o nulle. È dunque necessario che sia nulla ciascuna di queste quantità, cioè che si abbia $\Pi=0$ in tutto il corpo. Ma si è già osservato che Π non può annullarsi se non per $a=b=c=f=g=h=0$, ed è noto che in tal caso i relativi spostamenti prendono la forma

$$u=l+qz-ry \quad , \quad v=m+rx-pz \quad , \quad w=n+py-qx \; ,$$

essendo l, m, n, p, q, r costanti in tutto il corpo. Se in superficie si dànno gli *spostamenti*, si deve avere $l+qz-ry=0$, ecc., per infiniti valori di x, y, z. Ciò non può accadere se non si ha $l=m=n=p=q=r=0$, e conseguentemente $u=v=w=0$, cioè $u'=u''$, $v'=v''$, $w'=w''$ in tutto il corpo. Se invece si dànno le *pressioni*, esistono bensì infiniti sistemi di spostamenti, soddisfacenti ad (1′) e (1″); ma la configurazione finale del corpo è sempre la stessa. Del resto basta prescrivere i moti rigidi d'una particella qualsiasi perchè le equazioni (1′) e (1″) determinino completamente gli spostamenti. Infatti, presa l'origine nella particella considerata, si deve avere, per $x=y=z=0$,

$$u'=u'' \; , \text{ ecc. } ; \quad \frac{\partial w'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}=\frac{\partial w''}{\partial y}-\frac{\partial v''}{\partial z} \; , \text{ ecc. } ,$$

cioè $u=0,\ldots, \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ldots$ Ne segue $l=m=n=p=q=r=0$; poi $u'=u''$, $v'=v''$, $w'=w''$ in tutto il corpo.

5. Caso dei mezzi isotropi. Si sa (III, 3) che, nel caso dell'isotropia, il potenziale unitario ha la forma

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)(a+b+c)^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2).$$

Ne segue

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a}=-(A-2B)\Theta-2Ba \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}=-2Bf,$$

. . . .

e però la prima delle equazioni (1') diventa

$$X+(A-2B)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+2B\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)=0. \qquad (3)$$

Ora si ha

$$2\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Delta^2 u+\frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Sostituendo in (3) e supponendo ripetuto il precedente calcolo per le altre due equazioni, si vede che le *equazioni indefinite* per l'equilibrio d'un corpo isotropo sono

$$\begin{cases} X+(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+B\Delta^2 u=0, \\ Y+(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+B\Delta^2 v=0, \\ Z+(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+B\Delta^2 w=0. \end{cases}$$

A queste equazioni si può dare un'altra forma, utile per l'integrazione, facendo comparire quattro funzioni di capitale importanza in questa teoria, cioè la *dilatazione cubica* Θ, e le *doppie componenti della rotazione della particella*, che indicheremo d'ora innanzi nel seguente modo:

$$\mathfrak{T}_1=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} \ , \quad \mathfrak{T}_2=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \ , \quad \mathfrak{T}_3=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Si ha

$$\Delta^2 u-\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y},$$

e le equazioni ottenute precedentemente diventano

$$\begin{cases} X + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right) = 0\,, \\ Y + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial z}\right) = 0\,, \\ Z + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial x}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Quanto alle *equazioni ai limiti*, la prima delle (1″) diventa

$$L + (A - 2B)\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) = 0\,. \qquad (4)$$

Ora si ha

$$2\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{dz}{dn}$$

$$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dz}{dn}$$

cioè

$$2\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) = 2\frac{du}{dn} + \mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\,.$$

Sostituendo in (4) si ottiene la prima equazione della terna

$$\begin{cases} L + (A - 2B)\Theta\dfrac{dx}{dn} + 2B\dfrac{du}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_3\dfrac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\dfrac{dz}{dn}\right) = 0\,, \\ M + (A - 2B)\Theta\dfrac{dy}{dn} + 2B\dfrac{dv}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_1\dfrac{dz}{dn} - \mathfrak{T}_3\dfrac{dx}{dn}\right) = 0\,, \\ N + (A - 2B)\Theta\dfrac{dz}{dn} + 2B\dfrac{dw}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_2\dfrac{dx}{dn} - \mathfrak{T}_1\dfrac{dy}{dn}\right) = 0\,. \end{cases}$$

6. Si deve a Borchardt (*) una ingegnosa *decomposizione dell'espressione di* Π *in due parti, una delle quali non reca contributo alcuno alle equazioni indefinite*. Ricordando il processo che ci ha condotti alle equazioni dell'equilibrio, riesce chiaro che, quando si ha in vista la sola formazione delle equazioni indefinite,

---

(*) *Ueber die Transformation der Elasticitätsgleichungen* (Giornale di Crelle, 1873, p. 45).

è lecito trascurare tutti quei termini di Π che in $\int \delta \Pi dS$ dànno luogo ad integrali di spazio, identicamente nulli, o ad integrali di superficie. Ora, se si osserva che

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_1 + \frac{\partial v}{\partial z}$$

e conseguentemente

$$f^2 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}_1^2 + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z},$$

al potenziale

$$\Pi = -\frac{A}{2}(a+b+c)^2 - 2B(f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab)$$

si può dar la forma $\Pi_0 + \Pi_1$, ponendo

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B(\mathfrak{T}_1^2+\mathfrak{T}_2^2+\mathfrak{T}_3^2)\right], \quad \Pi_1 = -2B\sum\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Per assicurarci che Π_1 non influisce sulle equazioni indefinite osserviamo che $\int \delta \Pi_1 dS$ si scinde in tre parti analoghe alla seguente:

$$\int\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right)dS$$

$$= \int\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta v - \frac{\partial v}{\partial y}\delta w\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta v - \frac{\partial v}{\partial z}\delta w\right)\right)dS$$

$$- \int\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right)\delta v - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}\right)\delta w\right)dS.$$

Il primo integrale si trasforma in integrale di superficie ed il secondo è identicamente nullo. Dunque il potenziale elastico, in quanto ha influenza sulle equazioni indefinite dell'equilibrio, si può riguardare come una combinazione lineare del *quadrato della dilatazione* cubica col *quadrato della rotazione* del mezzo, ed i coefficienti della combinazione sono proporzionali alle costanti d'isotropia.

V. IL TEOREMA DI BETTI.

1. Questo importante teorema (*) stabilisce una relazione fra due sistemi di forze ed i relativi sistemi di spostamenti in uno stesso corpo elastico. Siano (u, v, w) ed (u', v', w') gli spostamenti che definiscono le configurazioni prese dal corpo sotto l'azione dei sistemi (X, Y, Z, L, M, N) ed (X', Y', Z', L', M', N') rispettivamente. Per la prima configurazione le condizioni di equilibrio si riassumono (IV, 1) nella relazione

$$\int \delta\Pi dS + \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \int (L\delta u + M\delta v + N\delta w)\, ds = 0\,,$$

che deve aver luogo qualunque siano le variazioni δu, δv, δw, ed in particolare per $\delta u = u'$, $\delta v = v'$, $\delta w = w'$, nel qual caso la relazione precedente diventa

$$\int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial h} h' \right) dS + \int (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int (Lu' + Mv' + Nw') ds = 0\,.$$

Similmente si ha

$$\int \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} a + \ldots + \frac{\partial \Pi'}{\partial h'} h \right) dS + \int (X'u + Y'v + Z'w) dS + \int (L'u + M'v + N'w) ds = 0.$$

E poichè, per una nota proprietà delle forme quadratiche,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \frac{\partial \Pi}{\partial b} b' + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial h} h' = \frac{\partial \Pi'}{\partial a'} a + \frac{\partial \Pi'}{\partial b'} b + \ldots + \frac{\partial \Pi'}{\partial h'} h\,,$$

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, cap. VI. Vedi anche una comunicazione di M. Lévy all'Accademia di Parigi (*Comptes-rendus*, 13 Août, 1888).

si ha pure

$$\int (Xu' + Yv' + Zw')dS + \int (Lu' + Mv' + Nw')ds$$
$$= \int (X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int (L'u + M'v + N'w)\,ds \,. \qquad (1)$$

Questo è il *teorema di Betti.*

2. Facciamone una prima applicazione prendendo

$$u' = l + qz - ry \;, \quad v' = m + rx - pz \;, \quad w' = n + py - qx \,,$$

con l, m, n, p, q, r costanti in tutto il corpo. Si ha

$$a' = b' = c' = f' = g' = h' = 0\,;$$

poi $\Pi' = 0$. Sostituendo nelle equazioni dell'equilibrio si ottiene

$$X' = Y' = Z' = L' = M' = N' = 0\,,$$

e la relazione (1) diventa

$$\int [X(l + qz - ry) + \ldots]\,dS + \int [L\,(l + qz - ry) + \ldots]\,ds = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà di l, m, n, p, q, r, l'ultima equazione si scinde nelle sei seguenti

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int X dS + \int L ds = 0 \;, & \int (Yz - Zy)\,dS + \int (Mz - Ny)\,ds = 0 \;, \\ \int Y dS + \int M ds = 0 \;, & \int (Zx - Xz)\,dS + \int (Nx - Lz)\,ds = 0 \;, \\ \int Z dS + \int N ds = 0 \;, & \int (Xy - Yx) dS + \int (Ly - Mx)\,ds = 0 \;, \end{array} \right.$$

le quali esprimono che le forze esterne si fanno equilibrio. Dunque *per l'equilibrio dei corpi elastici sono necessarie le condizioni che assicurano l'equilibrio dei corpi rigidi* (*).

(*) BETTI, *loc. cit.* Vedi anche CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité*, p. 2.

3. Ora prendiamo

$$u'=a'x+h'y+g'z \ , \quad v'=h'x+b'y+f'z \ , \quad w'=g'x+f'y+c'z \ ,$$

con a', b', c', f', g', h' costanti in tutto il corpo. Anche $\frac{\partial \Pi'}{\partial a'}, \frac{\partial \Pi'}{\partial b'}, \dots$ sono costanti, e però le equazioni indefinite dànno $X'=Y'=Z'=0$. Se determiniamo $a', b', \dots$, mediante le sei equazioni di primo grado

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial a'}=\frac{\partial \Pi'}{\partial b'}=\frac{\partial \Pi'}{\partial c'}=1 \ , \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial f'}=\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}=\frac{\partial \Pi'}{\partial h'}=0 \ , \tag{2}$$

le equazioni ai limiti ci dànno

$$L'=\frac{dx}{dn} \ , \quad M'=\frac{dy}{dn} \ , \quad N'=\frac{dz}{dn} \ ,$$

ed il secondo membro di (1) diventa

$$\int\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)ds=-\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dS=-\int\Theta dS \ .$$

Dunque

$$\int\Theta dS=-\int(Xu'+Yv'+Zw')dS-\int(Lu'+Mv'+Nw')ds \ . \tag{3}$$

Questa notevole formola fa conoscere la dilatazione totale d'un corpo elastico, quando sono date le forze esterne.

4. Applichiamo la formola (3) al caso d'un corpo isotropo. Siccome si ha

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)(a+b+c)^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2),$$

le equazioni (2) diventano

$$\begin{cases} -(A-2B)(a'+b'+c')-2Ba'=1 \ , & f'=0 \ , \\ -(A-2B)(a'+b'+c')-2Bb'=1 \ , & g'=0 \ , \\ -(A-2B)(a'+b'+c')-2Bc'=1 \ , & h'=0 \ . \end{cases}$$

Dalle equazioni di sinistra si deduce, sommando,

$$-(3A-4B)(a'+b'+c')=3\,;$$

poi, sostituendo nelle medesime equazioni,

$$a'=b'=c'=-\frac{1}{3A-4B}.$$

Finalmente

$$\frac{u'}{x}=\frac{v'}{y}=\frac{w'}{z}=-\frac{1}{3A-4B}.$$

Sostituendo in (3) si ottiene

$$\int\Theta dS=\frac{1}{3A-4B}\left(\int(Xx+Yy+Zz)\,dS+\int(Lx+My+Nz)ds\right). \quad (4)$$

5. Supponiamo, per esempio, che si eserciti una pressione uniforme sulla superficie d'un corpo isotropo, essendo nulle o trascurabili le forze di massa, e si domandi quale sarà la variazione di volume del corpo. Nel caso attuale

$$X=Y=Z=0\;;\quad L=p\frac{dx}{dn}\,,\quad M=p\frac{dy}{dn}\,,\quad N=p\frac{dz}{dn}.$$

La formola (4) ci dà

$$\int\Theta dS=\frac{p}{3A-4B}\int\left(x\frac{dx}{dn}+y\frac{dy}{dn}+z\frac{dz}{dn}\right)ds=-\frac{p}{3A-4B}\int 3dS\,,$$

cioè

$$\frac{\int\Theta dS}{S}=-\frac{3p}{3A-4B}.$$

Il primo membro rappresenta la dilatazione per unità di volume. Essa è dunque, per un dato corpo, proporzionale alla pressione. In pratica si dà il nome di *coefficiente di compressibilità cubica* e si rappresenta con q la diminuzione subita dall'unità di volume sotto l'unità di pressione. Dalla formola precedente si deduce

$$q=\frac{3}{3A-4B}.$$

Si considera in pratica anche un altro coefficiente E, che si chiama il *modulo di Young* o *coefficiente di elasticità di trazione*. In seguito si vedrà che

$$Eq = \frac{3B}{A - B},$$

e si conosceranno i mezzi che permettono di determinare sperimentalmente E e q, e conseguentemente di calcolare le costanti d'isotropia A e B per ciascun corpo. Secondo l'antica teoria di Navier e Poisson si dovrebbe avere sempre $A = 3B$, e quindi $Eq = \frac{3}{2}$; ma le più recenti esperienze hanno dimostrato che, se Eq ha questo valore per talune specie di cristalli, negli altri corpi, e specialmente nei metalli, il suo valore è molto lontano da $\frac{3}{2}$.

6. Proponiamoci ancora di determinare l'alterazione di volume che subisce un corpo elastico omogeneo *sotto l'azione del proprio peso*. Il corpo si supponga sostenuto mediante forze applicate verticalmente a punti d'un piano orizzontale. Posta l'origine nel baricentro, e diretto l'asse delle z in senso opposto a quello della gravità, sia $z = h$ l'equazione del piano di sostegno. Per ipotesi è $X = Y = L = M = 0$, mentre il rapporto di Z a ρ è una costante, uguale e di segno contrario all'accelerazione della gravità. La formola (3) diventa

$$\int \Theta dS = -Z \int (g'x + f'y + c'z) dS - \int N(g'x + f'y + c'z) ds .$$

Ma per l'equilibrio esterno è necessario che sia

$$\int N ds = P \quad , \quad \int N x ds = \int N y ds = 0 ,$$

dove P rappresenta il peso del corpo. Inoltre, per la scelta dell'origine, si ha

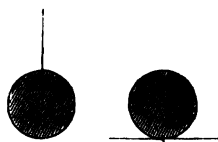
$$\int x dS = \int y dS = \int z dS = 0 .$$

Dunque

$$\int \Theta dS = - c' \int Nzds = - c'h \int Nds = - c'hP .$$

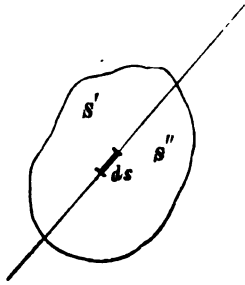
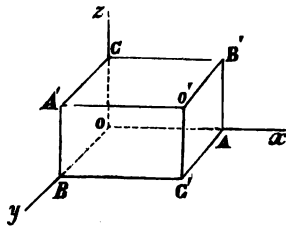
Se il corpo è isotropo

$$\int \Theta dS = \frac{hP}{3A - 4B} = \frac{1}{3} qhP .$$

In generale si può dire che, per una determinata orientazione, la totale variazione di volume è proporzionale al peso del corpo ed alla distanza del suo centro di gravità dal piano di sostegno. Per esempio, le variazioni di volume d'una sfera omogenea ed isotropa, sospesa ad un filo rigido o sostenuta da un piano rigido, sono eguali e di senso contrario, e proporzionali alla quarta potenza del raggio (*). Si osservi che, per un corpo qualunque, se il piano di sostegno contiene il centro di gravità, la parte superiore diminuisce o aumenta di quanto aumenta o diminuisce la parte inferiore, dimodochè resta invariato il volume totale.

VI. DISTRIBUZIONE DELLE AZIONI INTERNE.

1. Finora si sono studiate le deformazioni elastiche senza preoccupazione alcuna delle forze che si sviluppano, per effetto delle deformazioni stesse, nell'interno dei corpi. Ora, ponendoci da un altro punto di vista, vogliamo trarre dalla considerazione diretta di queste forze interne le formole fondamentali per lo studio dell'equilibrio elastico. Il paragone fra le formole ottenute precedentemente e quelle che siamo per ottenere ci fornirà i mezzi di studiare la distribuzione delle azioni interne nei corpi elastici de-

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, cap. VII.

formati. Prima facciamo un'osservazione. Nell'interno d'un corpo elastico S, già deformato ed equilibrato, si consideri un elemento superficiale ds, e si immagini prolungato il piano che lo contiene, in modo da tagliare S in due parti, S' ed S''. Fra tutte le forze dirette dai punti di S' verso quelli di S'' consideriamo soltanto quelle, le cui linee di azione attraversano ds. Esse hanno una certa risultante, che indicheremo con pds. Similmente le azioni che i punti di S'' esercitano sui punti di S', attraverso ds, hanno una risultante, eguale e di segno contrario alla prima, se, come si suppone, il corpo è in equilibrio. La funzione p rappresenta (*) la *pressione* su ds, per unità di superficie.

2. Equazioni indefinite. Ciò premesso, scomponiamo il corpo in elementi parallelepipedi mediante tre sistemi di piani, paralleli ai piani coordinati. Consideriamo uno di questi parallelepipedi, e scriviamo che trovasi in equilibrio sotto l'azione delle forze interne e delle forze di massa. Il piano Oyz divide il corpo in due parti. Chiamiamo p_x la pressione unitaria esercitata, attraverso $OBCA'$, dalla parte che non contiene il parallelepipedo su quella che lo contiene, dimodochè $p_x dydz$ sia la pressione su $OBCA'$, considerata come positiva quando è diretta verso l'interno del parallelepipedo. Similmente siano $p_y dzdx$, $p_z dxdy$ le pressioni subite dalle facce $OCAB'$, $OABC'$. Indicheremo con p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} le componenti di p_x secondo Ox, Oy, Oz; ecc. Quando dalla faccia $OBCA'$ si passa alla faccia opposta $O'B'C'A$, le funzioni p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} diventano

$$p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx\ ,\ p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} dx\ ,\ p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} dx\ .$$

(*) Sui varii modi di definire la *pressione* vedi l'eccellente *Cours de physique mathématique* di P. Duhem (Paris, A. Hermann, 1891, t. II, p. 257).

Dunque la pressione su $O'B'C'A$, considerata come *rivolta sul parallelepipedo,* ha per componenti $-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz, \ldots$, e però le pressioni interne, computate secondo l'asse delle x, dànno luogo alla somma

$$p_{xx}dydz+p_{yx}dzdx+\ldots-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz-\ldots=-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)dS.$$

Scrivendo che la somma delle forze che agiscono sul parallelepipedo secondo ciascun asse è uguale a zero, si ottengono le equazioni indefinite per l'equilibrio:

$$\left\{\begin{aligned} X&=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ Y&=\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ Z&=\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

3. Bisogna ancora scrivere le equazioni dei momenti. Si premetta che, essendo le forze esterne infinitesime del terzo ordine, esse dànno luogo a momenti trascurabili rispetto a quelli delle pressioni interne. Per semplicità componiamo intorno al centro del parallelepipedo, ed osserviamo che, per la continuità di cui si suppongono dotate, in direzione ed intensità, le pressioni p, è lecito ammettere che le loro risultanti sono applicate ai centri delle rispettive facce. Ricordiamoci che i momenti dovuti ad una forza (X, Y, Z) applicata nel punto (x, y, z) sono $Zy-Yz$, $Xz-Zx$, $Yx-Xy$. Ciò premesso, trascurando nelle forze gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, abbiamo

al punto $\left(-\frac{1}{2}dx, 0, 0\right)$ una forza le cui componenti sono $p_{xx}dydz$, $p_{xy}dydz$, $p_{xz}dydz$;

» $\left(0, -\frac{1}{2}dy, 0\right)$ » » » $p_{yx}dzdx$, $p_{yy}dzdx$, $p_{yz}dzdx$;

» $\left(0, 0, -\frac{1}{2}dz\right)$ » » » $p_{zx}dxdy$, $p_{zy}dxdy$, $p_{zz}dxdy$;

» $\left(\frac{1}{2}dx, 0, 0\right)$ » » » $-p_{xx}dydz$, $-p_{xy}dydz$, $-p_{xz}dydz$;

. . . .

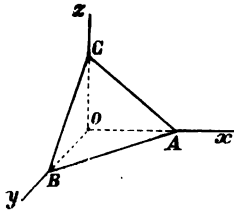
Il momento della coppia risultante, che agisce parallelamente al piano delle yz, è dunque

$$-dy \,.\, p_{yz}\, dz dx + dz \,.\, p_{zy}\, dx dy = (p_{zy} - p_{yz})\, dS\,,$$

e però le equazioni dei momenti sono

$$p_{yz} = p_{zy} \quad , \quad p_{zx} = p_{xz} \quad , \quad p_{xy} = p_{yx}\,.$$

Per conseguenza le *nove* funzioni p si riducono sempre a *sei* distinte. Vedremo che, una volta introdotto il concetto di elasticità, esse si ridurranno a *tre*.

4. **Equazioni ai limiti.** In superficie la triplice famiglia di piani determina elementi tetraedrici, quali $OABC$. Rappresentando con ds, ds_1, ds_2, ds_3 le aree di ABC, OBC, OCA, OAB, si deve avere, per l'equilibrio,

$$L ds + p_{xx} ds_1 + p_{yx} ds_2 + p_{zx} ds_3 = 0\ ;\ \text{ecc.}$$

Ora si osservi che

$$ds_1 = -\frac{dx}{dn} ds \quad , \quad ds_2 = -\frac{dy}{dn} ds \quad , \quad ds_3 = -\frac{dz}{dn} ds\,.$$

Ne segue che le equazioni ai limiti sono

$$\left\{ \begin{aligned} L &= p_{xx}\frac{dx}{dn} + p_{yx}\frac{dy}{dn} + p_{zx}\frac{dz}{dn}\,, \\ M &= p_{xy}\frac{dx}{dn} + p_{yy}\frac{dy}{dn} + p_{zy}\frac{dz}{dn}\,, \\ N &= p_{xz}\frac{dx}{dn} + p_{yz}\frac{dy}{dn} + p_{zz}\frac{dz}{dn}\,. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

5. Passiamo a studiare la *variazione delle pressioni* intorno a ciascun punto. Preso un elemento tetraedrico come $OABC$ nell'*interno* del corpo, sia $p_n ds$ l'azione esercitata, attraverso ds, da quella parte del corpo, che contiene il tetraedro, su quella che non lo

contiene. La pressione computata come *rivolta sul tetraedro* è $-p_n ds$, e per l'equilibrio si deve avere

$$-p_{nx}ds + p_{xx}ds_1 + p_{yx}ds_2 + p_{zx}ds_3 = 0 \; ; \quad \text{ecc.}$$

Se α, β, γ sono i coseni direttori della perpendicolare ad ABC, abbassata da O, si ha $ds_1 = \alpha ds$, $ds_2 = \beta ds$, $ds_3 = \gamma ds$; poi

$$\left\{ \begin{aligned} p_{nx} &= \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx} \, , \\ p_{ny} &= \alpha p_{xy} + \beta p_{yy} + \gamma p_{zy} \, , \\ p_{nz} &= \alpha p_{xz} + \beta p_{yz} + \gamma p_{zz} \, . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Queste relazioni, indipendenti dalle dimensioni del tetraedro, sussistono evidentemente quando l'elemento ABC, spostandosi parallelamente a sè stesso, finisce per contenere il punto O. Si hanno allora quattro elementi incrociantisi in O, e le relazioni (3) mostrano che, conoscendo le pressioni su tre elementi, la pressione sopra un quarto elemento è determinata per intensità e direzione. *Come variano la direzione e l'intensità della pressione quando l'elemento superficiale che la sopporta ruota intorno ad* O?

6. Prima domandiamoci se esistono elementi che subiscono soltanto pressioni tangenziali. Per brevità porremo

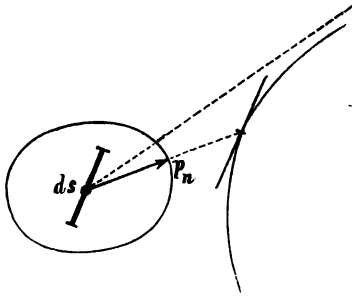
$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 p_{xx} + \beta^2 p_{yy} + \gamma^2 p_{zz} + 2\beta\gamma p_{yz} + 2\gamma\alpha p_{zx} + 2\alpha\beta p_{xy} \, ,$$

e, chiamato Δ il discriminante di questa forma, rappresenteremo con

$$\begin{vmatrix} q_{xx} & q_{yx} & q_{zx} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{zy} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{vmatrix}$$

il reciproco di Δ, e con $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ la forma reciproca di P. Ora, per le (3), la condizione di ortogonalità

$$\alpha p_{nx} + \beta p_{ny} + \gamma p_{nz} = 0$$

diventa $P=0$, e questa equazione rappresenta un cono quadrico, luogo delle perpendicolari agli elementi superficiali, sollecitati solo tangenzialmente. È noto che l'equazione dell'inviluppo dei piani condotti, pel vertice di P, perpendicolarmente alle generatrici, è appunto $Q=0$. Questo secondo cono, quando è reale, divide lo spazio angolare, intorno al punto considerato, in due regioni, e mentre gli elementi superficiali immersi in una regione subiscono soltanto *pressioni* propriamente dette, gli altri sopportano invece delle *tensioni*. Se il cono Q è immaginario, ciò vuol dire che gli elementi superficiali incrociantisi nel punto considerato sono tutti soggetti a pressioni, o tutti a tensioni. In questo caso si consideri la superficie $Q=\pm\Delta$, scegliendo il segno del secondo membro in modo che si abbia una superficie reale (necessariamente un ellissoide). Nel primo caso, invece, si prenda il segno $+$ in una regione ed il segno $-$ nell'altra, in modo che l'equazione $Q=\pm\Delta$ rappresenti una coppia di superficie reali, cioè due iperboloidi ad una

ed a due falde, aventi in comune il cono assintotico $Q=0$. In ogni caso la superficie $Q=\pm\Delta$ si chiama (*) *superficie direttrice* perchè basta la sua conoscenza per determinare la direzione della pressione su ciascun elemento. Infatti, se si osserva che si ha, in virtù delle (3),

$$\left\{\begin{array}{l} p_{nx}q_{xx}+p_{ny}q_{xy}+p_{nz}q_{xz}=\alpha\Delta\,, \\ p_{nx}q_{yx}+p_{ny}q_{yy}+p_{nz}q_{yz}=\beta\Delta\,, \\ p_{nx}q_{zx}+p_{ny}q_{zy}+p_{nz}q_{zz}=\gamma\Delta\,, \end{array}\right. \tag{4}$$

si vede subito che *il piano conjugato alla direzione di* p_n *è* $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, *cioè il piano stesso dell'elemento.* Quanto al-

(*) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § CXLI.

l'intensità, se x, y, z sono le coordinate dell'estremità del segmento rappresentativo di p_n, le (4), quadrate e sommate, dànno

$$(xq_{xx}+yq_{xy}+zq_{xz})^2+(xq_{yx}+yq_{yy}+zq_{yz})^2+(xq_{zx}+yq_{zy}+zq_{zz})^2=\Delta^2.$$

Dunque *i valori assoluti delle pressioni o tensioni intorno ad un punto variano come i diametri di un ellissoide*. Questo si chiama *ellissoide di elasticità*. Se disponiamo gli assi coordinati parallelamente agli assi di P, dimodochè si abbia $p_{yz}=p_{zx}=p_{xy}=0$, le equazioni della superficie direttrice e dell'ellissoide di elasticità diventano

$$\frac{x^2}{\varpi_1}+\frac{y^2}{\varpi_2}+\frac{z^2}{\varpi_3}=\pm 1 \; ,$$

$$\frac{x^2}{\varpi_1^2}+\frac{y^2}{\varpi_2^2}+\frac{z^2}{\varpi_3^2}=1 \; ,$$

e si vede così più facilmente che le dette superficie hanno gli stessi assi. Inoltre certi due elementi superficiali, perpendicolari fra loro, sopportano la minima e la massima tensione, ed appartengono alla terna, generalmente unica, degli elementi non soggetti a pressioni oblique. È poi chiaro che, qualunque sia l'orientazione degli assi, i valori $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ delle *pressioni principali* sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} p_{xx}-\varpi & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy}-\varpi & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}-\varpi \end{vmatrix}=0.$$

7. Il paragone fra le equazioni dell'equilibrio, indefinite ed ai limiti, ottenute nel quarto capitolo, e le equazioni (1) e (2), mostra che *nei corpi elastici* le funzioni p dipendono da *tre* sole funzioni u, v, w mediante le relazioni

$$p_{xx}=\frac{\partial\Pi}{\partial a} \; , \quad p_{yy}=\frac{\partial\Pi}{\partial b}, \ldots, \quad p_{yz}=p_{zy}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}, \ldots,$$

cioè, adoperando la segnatura del terzo capitolo,

$$\left\{\begin{aligned}
-p_{xx} &= Aa + C'b + B'c + 2(F_1 f + G_1 g + H_1 h)\\
-p_{yy} &= C'a + Bb + A'c + 2(F_2 f + G_2 g + H_2 h)\\
-p_{zz} &= B'a + A'b + Cc + 2(F_3 f + G_3 g + H_3 h)\\
-p_{yz} &= F_1 a + F_2 b + F_3 c + 2(Ff + H'g + G'h)\\
-p_{zx} &= G_1 a + G_2 b + G_3 c + 2(H'f + Gg + F'h)\\
-p_{xy} &= H_1 a + H_2 b + H_3 c + 2(G'f + F'g + Hh)
\end{aligned}\right.$$

Son queste le formole che fanno conoscere la distribuzione delle forze interne in ogni punto d'un mezzo elastico deformato. Se, nel punto che si considera, il mezzo è dotato di piani di simmetria, spariscono (III, 2) le elasticità asimmetriche, e si ha semplicemente

$$\left\{\begin{aligned}
-p_{xx} &= Aa + C'b + B'c \;, & -p_{yz} &= 2Ff \;,\\
-p_{yy} &= C'a + Bb + A'c \;, & -p_{zx} &= 2Gg \;,\\
-p_{zz} &= B'a + A'b + Cc \;, & -p_{xy} &= 2Hh \;.
\end{aligned}\right.$$

Con queste formole è facile (*) spiegarsi le denominazioni proposte da Rankine per distinguere fra loro i diversi coefficienti di elasticità.

VII. MOTO ELASTICO.

1. Equazioni del moto elastico. Supponiamo che i punti del corpo, invece di trovarsi in equilibrio, vibrino intorno a certe posizioni fisse (x, y, z), e si trovino, alla fine del tempo t, nelle posizioni $(x+u, y+v, z+w)$. In tal caso gli spostamenti u, v, w sono certe funzioni di x, y, z, t, determinate le quali riesce nota la serie delle configurazioni che il sistema va assumendo col va-

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité*, p. 38.

riare del tempo. Alla determinazione di u, v, w provvedono le equazioni del moto, che si deducono dalle equazioni indefinite (IV, 2) dell'equilibrio facendo uso del solito *principio di d'Alembert*, esprimendo cioè che tutto succede come se il corpo fosse ad ogni istante in equilibrio sotto l'azione delle forze propriamente dette e di forze fittizie, uguali e di segno contrario a quelle che produrrebbero il moto effettivo di ciascun punto. Queste ultime vengono misurate dal prodotto della massa ρdS per l'accelerazione, le cui componenti sono, com'è noto,

$$\frac{\partial^2(x+u)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,\qquad \frac{\partial^2(y+v)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,\qquad \frac{\partial^2(z+w)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,.$$

Così vediamo che le equazioni indefinite del moto si deducono dalle equazioni indefinite dell'equilibrio sostituendo $XdS-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dS$ a XdS, ecc. È poi evidente che le condizioni ai limiti restano sempre le stesse. Il problema del moto elastico si risolve dunque con le seguenti equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial a}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial h}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial g}\,,\\ Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial h}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial b}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\,,\\ Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial g}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial f}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial c}\,,\end{aligned}\right. \tag{1}$$

completate dalle equazioni ai limiti (IV, 2).

2. Teorema: *Se le forze esterne non variano col tempo, il problema generale del moto elastico è sempre scomponibile in due problemi speciali:* 1° *un problema di semplice equilibrio;* 2° *un problema di moto sotto l'azione delle sole forze elastiche.*

Siano infatti u', v', w' gli spostamenti che bisogna dare ai punti del corpo perchè rimangano in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne e delle forze elastiche. Le funzioni u', v', w', indipendenti da t, debbono soddisfare alle equazioni (1') ed (1'') del quarto ca-

pitolo. Sottraendo queste dalle equazioni (1') ed (1''), relative al sistema (u, v, w) di spostamenti, si ottengono le relazioni

$$\left.\begin{aligned}-\rho\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi''}{\partial a''}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi''}{\partial h''}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi''}{\partial g''},\\ 0&=\frac{\partial\Pi''}{\partial a''}\frac{dx}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi''}{\partial h''}\frac{dy}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi''}{\partial g''}\frac{dz}{dn},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

alle quali debbono soddisfare gli spostamenti residui $u-u'=u''$, $v-v'=v''$, $w-w'=w''$. Le relazioni (2) sono precisamente le equazioni del moto elastico, nel caso che manchino le forze esterne. È necessario supporre le forze esterne indipendenti dal tempo, perchè se X, per esempio, fosse funzione di t, siccome la X che comparisce nelle equazioni (1') non è che un valore particolare di questa funzione, la differenza fra le due X non sarebbe sempre nulla, ma varierebbe col tempo. Si osservi che il teorema dimostrato può ricevere la seguente notevole interpretazione: « *I punti d'un corpo elastico, soggetto a forze indipendenti dal tempo, vibrano intorno alle corrispondenti posizioni di equilibrio come vibrerebbero, liberi da forze esterne, intorno alle loro posizioni naturali* » (*).

3. Di quale natura è il moto dei punti d'un corpo elastico vibrante? In virtù dell'ultimo teorema, se si vuol riconoscere l'*indole* delle vibrazioni elastiche, è lecito supporre il corpo completamente libero. In questa ipotesi le equazioni del moto sono

$$(1')\left\{\begin{aligned}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial a}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial h}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial g}, & 0&=\frac{\partial\Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn}\\ -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial h}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial b}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial f}, & 0&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial h}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial\Pi}{\partial b}\frac{dy}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\frac{dz}{dn}\\ -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial g}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial f}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Pi}{\partial c}, & 0&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial g}\frac{dx}{dn}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial\Pi}{\partial c}\frac{dz}{dn}\end{aligned}\right\}(1'$$

(*) Vedi CLEBSCH, *Théorie de l'Élasticité*, p. 53.

Tentiamo di soddisfarle prendendo

$$u = u'\varphi(t)\ ,\quad v = v'\varphi(t)\ ,\quad w = w'\varphi(t)\ ,$$

con u', v', w' indipendenti dal tempo. Distinguendo con un apice tutto ciò che si riferisce ad u', v', w' si ha, per derivazione, $a = a'\varphi(t)$, $b = b'\varphi(t)$, ..., $h = h'\varphi(t)$, e conseguentemente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial a'}\varphi(t)\ ,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = \frac{\partial \Pi'}{\partial b'}\varphi(t)\ , \ldots ;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial h} = \frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\varphi(t)\ ,$$

poichè $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial h}$ si esprimono linearmente in $a, b, \ldots, h$. Ciò premesso, la prima delle (1') diventa

$$-\frac{\rho u'}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\ ,$$

e siccome il secondo membro è indipendente dal tempo, è necessario che altrettanto avvenga del primo, e sia, per conseguenza,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\varphi\ ,$$

dove con $-k^2$ si è voluto rappresentare una costante qualunque. Dunque la più generale forma possibile della funzione φ è

$$\varphi(t) = \lambda\cos(kt) + \mu\,\mathrm{sen}(kt)\ ,$$

e le equazioni (1') ed (1'') diventano

$$(2')\left\{\begin{aligned}
\rho k^2 u' &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\ ,\\
\rho k^2 v' &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial b'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\ ,\\
\rho k^2 w' &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial c'}\ ,
\end{aligned}\right.
\qquad
\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Pi'}{\partial a'}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\frac{dz}{dn}\\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Pi'}{\partial b'}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\frac{dz}{dn}\\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Pi'}{\partial c'}\frac{dz}{dn}
\end{aligned}\right\}(2'')$$

Supponiamo che, con un mezzo qualsiasi, si pervenga ad integrare le equazioni (2'). Allora u', v', w' sono certe funzioni di x, y, z, ed anche di k^2, la cui sostituzione nelle (2'') ci fornisce, per eli-

minazione di x, y, z fra le medesime (2'') e l'equazione della superficie, un'equazione in k^2, che ammette come radici tutti i valori possibili $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ di k^2. Ad ogni k_i^2 corrisponde una speciale soluzione $u' = u_i$, $v' = v_i$, $w' = w_i$ delle equazioni (2') e (2''), e conseguentemente una soluzione particolare delle equazioni (1') ed (1''), delle quali si ottiene (*) la soluzione generale combinando linearmente tutte le possibili soluzioni, cioè scrivendo

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \varphi_i(t) \ , \quad v = \sum_{i=1}^{i=\infty} v_i \varphi_i(t) \ , \quad w = \sum_{i=1}^{i=\infty} w_i \varphi_i(t) \ , \qquad (2)$$

dove

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \cos(k_i t) + \mu_i \operatorname{sen}(k_i t) .$$

Più oltre si vedrà come si determinino le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$ mediante le *circostanze iniziali* del moto.

4. Distinguiamo con indici i e j due soluzioni delle equazioni (2'), corrispondenti ai valori k_i e k_j di k. Per renderci conto della natura delle vibrazioni (2) è d'uopo dimostrare una importante proprietà dell'integrale

$$K_{ij} = \int (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j) \rho dS .$$

Le (2') e le (2''), relative agli spostamenti u_i, v_i, w_i, si possono considerare come le equazioni dell'equilibrio, in cui si ponga

$$X = \rho k^2 u_i \ , \quad Y = \rho k^2 v_i \ , \quad Z = \rho k^2 w_i \ , \quad L = M = N = 0 .$$

Quindi per $\delta u = u_j$, $\delta v = v_j$, $\delta w = w_j$, l'eguaglianza (1) del quarto capitolo diventa

$$k_i^2 K_{ij} = -\int \left(a_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial b_i} + \ldots + h_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial h_i} \right) dS . \qquad (3)$$

Siccome il secondo membro e K_{ij} non variano per lo scambio di i

---

(*) Vedi Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'élasticité* (Paris, G. Carré, 1892, p. 112).

con j, è necessario che si abbia $k_i^2 K_{ij} = k_j^2 K_{ij}$, e poichè, per ipotesi, $k_i^2 \neq k_j^2$ se $i \neq j$, si ha pure $K_{ij} = 0$. Invece, se $i = j$, il secondo membro di (3) si riduce a $-2\int \Pi_i dS$. Riassumendo vediamo che

$$K_i = \left| \begin{array}{ll} -\frac{2}{k_i^2}\int \Pi_i dS & , \text{ se } i = j\,; \\ 0 & , \text{ se } i \neq j\,. \end{array} \right. \tag{4}$$

5. Utilizziamo l'ultimo risultato per dimostrare che *le costanti* $k_1, k_2, k_3, \ldots$ *sono tutte reali.* Dal processo seguìto per ottenere l'equazione che ammette le radici $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ appare evidente che questa equazione *ha i coefficienti reali.* Ad ogni radice immaginaria corrisponde dunque la radice conjugata. Sia k_i^2, k_j^2, una coppia di tali radici. È chiaro che le equazioni (2′), scritte una volta con k_i^2 ed un'altra con k_j^2, forniscono per u_i ed u_j, v_i e v_j, w_i e w_j, espressioni conjugate, e però $u_i u_j$, $v_i v_j$, $w_i w_j$ sono somme di quadrati. Dunque K_{ij} si compone di elementi essenzialmente non negativi. Ma già sappiamo che dev'essere $K_{ij} = 0$. Ciò non può aver luogo se non è $u_i = 0$, $u_j = 0, \ldots, w_j = 0$. Dunque non è possibile che $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ non siano reali. Che questi numeri siano anche positivi risulta poi subito dall'eguaglianza $k_i^2 K_{ii} = -2\int \Pi_i\, dS$, giacchè Π_i è quantità essenzialmente negativa, e K_{ii} è una somma di quadrati. Dunque $k_1, k_2, k_3, \ldots$ sono numeri reali.

6. Ritorniamo alle formole (2). Queste ci dicono che le vibrazioni dei punti d'un corpo elastico si possono considerare come risultanti dalla sovrapposizione di vibrazioni più semplici, quali sono le vibrazioni $u = u'\varphi(t)$, $v = v'\varphi(t)$, $w = w'\varphi(t)$ per ciascun valore di k. Se k fosse immaginario, u, v, w si esprimerebbero esponenzialmente in t, e però potrebbero decrescere o crescere indefinitamente col tempo. Invece, per la realtà di k, ciò non può aver luogo, poichè u, per esempio, non supera mai, in valore assoluto, la quantità $u'\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, indipendente dal tempo. Inoltre, se si aumenta t

di $\frac{2\pi}{k}$ nelle precedenti espressioni di u, v, w, queste tornano ai primitivi valori. Esse rappresentano dunque un moto pendolare, la cui durata periodica $\frac{2\pi}{k}$ è la stessa per tutti i punti del corpo, variando solo l'ampiezza dell'oscillazione da punto a punto. Si arriva così alla seguente notevole conclusione (*): *I moti interni d'un corpo elastico non possono nè aumentare nè diminuire col tempo. Al contrario tutti i moti* parziali *si eseguono in egual tempo fra limiti invariabili, raggiunti periodicamente.* Le formole (2) mostrano che *le vibrazioni di ciascun punto risultano dalla sovrapposizione di infiniti moti pendolari, aventi periodi diversi.*

7. Teorema di Saint-Venant: *La forza viva d'un corpo* elastico *vibrante è uguale alla somma delle forze vive dovute ai singoli moti pendolari* (**).

La forza viva totale del corpo vibrante è

$$\Phi = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\rho dS.$$

Ora, per le (2), si ha

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i,j}(u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)\frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_j}{dt};$$

poi, moltiplicando per ρdS ed integrando a tutto S, si ottiene

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij}\frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_j}{dt}.$$

Il secondo membro si riduce, in virtù di (4), ai soli termini per i quali è $i=j$. Dunque

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\infty} K_{ii}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2.$$

(*) CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité*, p. 130.

(**) Vedi i *Comptes-rendus*, 1872, 2me sem., pp. 1176, 1425, 1567.

D'altra parte la forza viva dovuta ai soli moti pendolari, corrispondenti all'indice i, è appunto

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\int(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 \rho dS = \frac{1}{2} K_{ii}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2.$$

È dunque vero che si ha $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots.$ In altri termini tutto accade come se il corpo fosse animato da infiniti moti pendolari, coesistenti con perfetta indipendenza fra loro.

8. Ora, tornando all'integrazione delle (1'), ci resta soltanto da far vedere come riescano pienamente determinate le costanti

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$$

quando si fissano le circostanze iniziali del moto, quando cioè in un dato istante, che si può sempre assumere come origine del tempo, si suppongono conosciuti lo *spostamento* (u_0, v_0, w_0) e la *velocità* (u_0', v_0', w_0') di ciascun punto. Per $t = 0$ si ha

$$\varphi = \lambda \ , \quad \frac{d\varphi}{dt} = k\mu \ ,$$

e conseguentemente (*), ponendo $t = 0$ nelle formole (2), anche dopo averle derivate una volta rispetto a t,

$$u_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda_i u_i \ , \quad u_0' = \sum_{i=1}^{i=\infty} k_i \mu_i u_i \ .$$

Si moltiplichi la prima eguaglianza per $\rho u_n dS$, e, dopo aver fatto altrettanto per v_0 e w_0, si sommi e si integri. Evidentemente si ottiene

$$K_{0n} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda_i K_{in} = \lambda_n K_{nn} \ ,$$

vale a dire

$$\lambda_n = \frac{\int(u_0 u_n + v_0 v_n + w_0 w_n)\rho dS}{\int(u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)\rho dS}.$$

(*) Vedi POINCARÉ, *loc. cit.*, p. 113.

Basta cambiare λ_n in $k_n\mu_n$ ed u_0, v_0, w_0 in u_0', v_0', w_0' per trovare μ_n:

$$\mu_n = \frac{\int (u_0' u_n + v_0' v_n + w_0' w_n)\rho dS}{k_n \int (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)\rho dS}.$$

Qui si osservi che le costanti così calcolate sono quelle che determinano le *ampiezze* degli infiniti moti pendolari componenti, mentre le *durate* periodiche degli stessi moti riescono determinate mediante $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Dalla precedente analisi risulta dunque che, *mentre le ampiezze delle oscillazioni dipendono dalle circostanze iniziali del moto, la loro durata dipende invece dalla forma geometrica e dalle dimensioni del corpo.* In altri termini, il variare delle circostanze iniziali del moto in un dato corpo non influisce che sull'ampiezza delle oscillazioni, restando sempre inalterato, per ogni oscillazione componente, il tempo in cui essa si compie (*).

9. In tutta l'analisi precedente rimane un dubbio, cioè che l'equazione che deve fornire i valori delle k possa non ammettere infinite radici, ed anche che possa non ammetterne alcuna, nel qual caso non esisterebbero soluzioni delle equazioni (2') e (2''), della forma considerata. Ora noi dimostreremo (**) che *le dette equazioni ammettono infinite soluzioni diverse.* Tra gli infiniti spostamenti, obbligati alla condizione

$$\int (u^2 + v^2 + w^2)\rho dS = 1 , \qquad (5)$$

cerchiamo quello che fa prendere a $-\int \Pi dS$ il minimo valore. Tutto fa credere che un tal minimo esista, e sia positivo o nullo, perchè la funzione considerata, essenzialmente positiva, è continua in virtù delle ipotesi fatte fin dal principio sugli spostamenti. Il *calcolo delle variazioni* conduce a porre

$$\int \delta\Pi dS + \lambda \int (u\delta u + v\delta v + w\delta w)\rho dS = 0 , \qquad (6)$$

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité*, p. 125.

(**) Poincaré, *loc. cit.*, p. 104. Questa dimostrazione, in verità, lascia molto a desiderare in quanto afferma l'esistenza del minimo di $-\int \Pi dS$.

rappresentando con λ una costante, e con δu, δv, δw le variazioni arbitrarie di u, v, w. In particolare, se si fa $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$, si ha pure

$$\delta a = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = a \text{ , ecc.;}$$

quindi

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a + \ldots = 2\Pi \,,$$

e la (6) diventa, in virtù di (5),

$$-\int \Pi dS = \frac{1}{2} \lambda \,. \tag{7}$$

Dunque λ è un numero positivo, o nullo, che rappresenteremo con k_1^2. Se poi paragoniamo la (6) con l'equazione ottenuta applicando il principio di Lagrangia, e dalla quale si sono ricavate (IV, 2) tutte insieme le equazioni dell'equilibrio elastico, si vede che le sei equazioni nelle quali, per l'arbitrarietà di δu, δv, δw, si scinde la (6), si possono comodamente dedurre dalle equazioni stesse dell'equilibrio, facendovi $X = \rho\lambda u$, $Y = \rho\lambda v$, $Z = \rho\lambda w$, $L = M = N = 0$. In tal modo si ritrovano precisamente le equazioni (2′) e (2″), le quali debbono dunque ammettere, per $k = k_1$, una soluzione (u_1, v_1, w_1) costituita appunto dalle funzioni che, soddisfacendo alla (5), rendono minima $-\int \Pi dS$. Stabilita così l'esistenza di queste particolari soluzioni, consideriamo, fra le infinite funzioni soddisfacenti alla (5), quelle che soddisfano anche alla condizione

$$\int (u u_1 + v v_1 + w w_1) \rho dS = 0 \,, \tag{8}$$

e fra esse determiniamo quelle che rendono minima $-\int \Pi dS$. Per tali funzioni, qualunque siano le variazioni δu, δv, δw, e per convenienti valori di λ e λ_1, si deve avere

$$\int \delta \Pi dS + \lambda \int (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \rho dS + \lambda_1 \int (u_1 \delta u + v_1 \delta v + w_1 \delta w) \rho dS = 0 \,. \tag{9}$$

In particolare, per $\delta u = u_1$, $\delta v = v_1$, $\delta w = w_1$,

$$\int \delta\Pi dS + \lambda_1 = 0 ,$$

dove

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a}\delta a + \ldots = \frac{\partial\Pi}{\partial a} a_1 + \ldots$$

D'altra parte la (6), soddisfatta dalle funzioni u_1, v_1, w_1, diventa, per $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$,

$$\int \delta\Pi dS = 0 \ , \quad \text{dove} \quad \delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} a + \ldots = \frac{\partial\Pi}{\partial a} a_1 + \ldots$$

Dunque $\lambda_1 = 0$. Dopo ciò la (9) assume la forma della (6), e però λ dev'essere un numero k_2^2, *non inferiore a* k_1^2, poichè le nuove funzioni u_2, v_2, w_2, soddisfacenti alle (2′) per $k = k_2$, sono obbligate a verificare la relazione (8), oltre la (5). In modo analogo si perviene a determinare le funzioni u_3, v_3, w_3, per le quali $-\int \Pi dS$ raggiunge un valore $\frac{1}{2} k_3^2$, minimo fra tutti quelli che può assumere per funzioni u, v, w, soddisfacenti alle condizioni (5), (8), ed alla nuova condizione

$$\int (uu_2 + vv_2 + ww_2)\rho dS = 0 .$$

È ovvio che k_3^2 non è inferiore a k_2^2; ecc.

10. Ottenuti così i numeri $k_1^2 \leqq k_2^2 \leqq k_3^2 \leqq \ldots$, bisogna dimostrare che essi sono realmente tutti fra loro diversi, e per questo cominceremo dal togliere il dubbio che essi possano essere tutti nulli. Se ciò avvenisse, la (7) darebbe $\int \Pi dS = 0$, e le funzioni u_1, v_1, w_1 avrebbero necessariamente la forma caratteristica degli spostamenti rigidi. Altrettanto si avrebbe per le successive terne di funzioni; ma la settima terna si esprimerebbe linearmente nelle prime sei, e noi ora dimostreremo che ciò non può accadere, perchè

gli infiniti spostamenti (u_i, v_i, w_i) *sono linearmente indipendenti fra loro.* Infatti, se si avesse

$$u_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i u_i \ , \quad v_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i v_i \ , \quad w_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i w_i \ ,$$

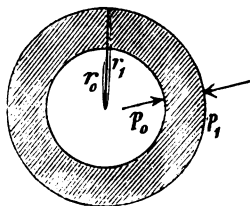
con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ costanti, si avrebbe anche

$$\int (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) \rho \, dS = \sum_1^{n-1} \lambda_i K_{in} = 0 \ ,$$

ed invece, essendo le funzioni u_n, v_n, w_n fra quelle che soddisfano alla (5), il primo membro è uguale all'unità.

VIII. APPLICAZIONE ALLA SFERA.

1. Le considerazioni svolte nei precedenti capitoli ci mettono in grado di risolvere completamente il problema generale proposto in principio del quarto capitolo, purchè si sappiano integrare certe equazioni differenziali. In seguito ci occuperemo dei mezzi di facilitare o di effettuare tale integrazione in generale; ma in certi casi speciali la semplicità stessa dei dati fa intuire la forma da attribuire agli spostamenti perchè siano soddisfatte le equazioni dell'equilibrio o del moto. Prenderemo ad esempio la sfera, col solo scopo di fare un'applicazione immediata dei risultati precedentemente ottenuti.

2. Equilibrio. Si consideri un involucro sferico, omogeneo ed isotropo, sottoposto internamente ad una pressione p_0 per unità di superficie, ed esternamente ad una pressione p_1. Sia r_0 il raggio interno, r_1 il raggio esterno. Se le pressioni sono uniformemente distribuite, si capisce che lo spostamento alla distanza

r dal centro deve dipendere dalla sola r e non può aver luogo che nella direzione stessa del raggio, dimodochè, chiamato ϵ l'allungamento unitario, sia $u=\epsilon x$, $v=\epsilon y$, $w=\epsilon z$, e conseguentemente

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon+x\frac{d\epsilon}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\epsilon+\frac{x^2}{r}\frac{d\epsilon}{dr}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{d\epsilon}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{xy}{r}\frac{d\epsilon}{dr}\ ,\ \text{ecc.}$$

Quindi

$$\Theta=3\epsilon+r\frac{d\epsilon}{dr}\ ,\quad \mathfrak{T}_1=\mathfrak{T}_2=\mathfrak{T}_3=0\ ,$$

e le equazioni indefinite diventano

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0\,.$$

Dunque Θ è una costante, che chiameremo 3λ. Da

$$3\epsilon+r\frac{d\epsilon}{dr}=3\lambda$$

si deduce, integrando,

$$\epsilon=\lambda+\frac{\mu}{r^3}\,. \tag{1}$$

Ora si tratta di determinare le costanti λ e μ. La prima equazione ai limiti, relativa ad una qualunque delle due superficie sferiche, diventa, a prescindere dagli indici 0 ed 1 che distinguono le dette superficie l'una dall'altra,

$$p\frac{dx}{dn}+2B\frac{du}{dn}+(A-2B)\Theta\frac{dx}{dn}=0\ ,$$

cioè, osservando che per n bisogna mettere r o $-r$,

$$p\frac{x}{r}+2B\left(\epsilon\frac{x}{r}+x\frac{d\epsilon}{dr}\right)+3\lambda(A-2B)\frac{x}{r}=0\,.$$

Ne segue, dividendo per $\frac{x}{r}$ e adoperando la (1),

$$p-\frac{4\mu B}{r^3}+\lambda(3A-4B)=0\,.$$

Allo stesso risultato si perviene mediante le altre due condizioni ai limiti. Si hanno così le equazioni

$$p_0 r_0^3 = 4\mu B - \lambda(3A - 4B) r_0^3 \quad , \quad p_1 r_1^3 = 4\mu B - \lambda(3A - 4B) r_1^3 \quad ,$$

dalle quali si deduce

$$\lambda = -\frac{p_1 r_1^3 - p_0 r_0^3}{(3A - 4B)(r_1^3 - r_0^3)} \quad , \quad \mu = -\frac{(p_1 - p_0) r_1^3 r_0^3}{4B(r_1^3 - r_0^3)} . \qquad (2)$$

Sostituendo in (1) si ha il mezzo di conoscere la deformazione in ciascun punto, le variazioni dello spessore, del volume, ecc. Per esempio l'aumento totale di volume è

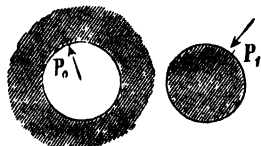
$$\int \Theta dS = 3\lambda . \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) = \frac{4\pi(p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3)}{3A - 4B} .$$

3. Nel caso d'una sfera piena o d'un mezzo indefinito, provvisto d'una cavità sferica, non si ha più che una superficie sola da considerare, e quindi una sola equazione per determinare λ e μ; ma in tal caso si provvede subito alla determinazione d'una costante osservando che lo spostamento ϵr deve serbarsi finito, e però deve essere $\mu = 0$ nel primo caso, $\lambda = 0$ nel secondo. Si osservi che le formole (2) sussistono anche in questi casi estremi, giacchè dànno, per $r_0 = 0$,

$$\lambda = -\frac{p_1}{3A - 4B} \quad , \quad \mu = 0 \ ,$$

e per r_1 infinito, supponendo inoltre $p_1 = 0$,

$$\lambda = 0 \quad , \quad \mu = \frac{p_0 r_0^3}{4B} .$$

Si noti che le penultime formole convengono ugualmente al caso d'un involucro sferico qualunque, sottoposto a pressioni opposte ed uguali per unità di superficie.

4. **Pressioni e tensioni.** Per qualunque corpo isotropo si ha

$$\begin{cases} -p_{xx} = (A-2B)\Theta + 2B\dfrac{\partial u}{\partial x}\ , & -p_{yz} = B\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ -p_{yy} = (A-2B)\Theta + 2B\dfrac{\partial v}{\partial y}\ , & -p_{zx} = B\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ -p_{zz} = (A-2B)\Theta + 2B\dfrac{\partial w}{\partial z}\ , & -p_{xy} = B\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Nel caso attuale queste formole diventano

$$-p_{xx} = \lambda(3A-4B) + 2\mu B\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}\ , \quad \text{ecc.}\ ,$$

$$p_{yz} = 6\mu B\frac{yz}{r^5}\ , \quad p_{zx} = 6\mu B\frac{zx}{r^5}\ , \quad p_{xy} = 6\mu B\frac{xy}{r^5}.$$

Se facciamo passare l'asse delle z nel punto intorno al quale vogliamo studiare la distribuzione delle azioni interne, le ultime formole dànno, facendovi $x=y=0$, $z=r$,

$$\varpi_1 = \varpi_2 = -\lambda(3A-4B) - \frac{2\mu B}{r^3}\ , \quad \varpi_3 = -\lambda(3A-4B) + \frac{4\mu B}{r^3}.$$

In particolare, per $\mu=0$, si ha $\varpi_1=\varpi_2=\varpi_3=p_1$, e l'ellissoide di elasticità, in ogni punto, diventa una sfera. Dunque in una sfera piena, sottoposta ad una pressione uniforme, si può dire che questa pressione si trasmette normalmente a tutti gli elementi superficiali interni, con eguale intensità, come nei fluidi. Invece, se si fa $\lambda=0$, si ha

$$\varpi_1 = \varpi_2 = -\frac{1}{2}\varpi_3 = -\frac{p_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$$

e l'ellissoide di elasticità è di rotazione intorno al raggio. Dunque in un mezzo indefinito, omogeneo ed isotropo, provvisto d'una cavità sferica, ogni pressione uniformemente distribuita sulle pareti della cavità si trasmette sugli elementi superficiali, perpendicolari ai raggi, con una intensità che si va affievolendo in ragione inversa del cubo della distanza al centro della cavità, e provoca tensioni in tutti gli elementi che contengono il raggio. In altri termini, se

ci figuriamo il mezzo suddiviso in sottilissimi strati sferici, concentrici alla cavità, possiamo dire che ogni strato, mentre tende a *lacerarsi*, con eguale intensità, secondo tutti i suoi circoli massimi, subisce anche, nel suo spessore, uno *schiacciamento* due volte più intenso.

5. Vibrazioni. Per lo studio delle vibrazioni ci limiteremo a considerare il caso d'una sfera piena, di raggio a. Si ha sempre $u = \epsilon x$, $v = \epsilon y$, $w = \epsilon z$; ma ϵ è funzione di r e di t. Quindi

$$\Theta = 3\epsilon + r\frac{\partial\epsilon}{\partial r} \quad , \quad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3 = 0 ,$$

e le equazioni indefinite diventano

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial\Theta}{\partial x} \quad , \quad \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A\frac{\partial\Theta}{\partial y} \quad , \quad \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\frac{\partial\Theta}{\partial z} .$$

La prima equazione si può anche scrivere

$$\rho x\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} = A\frac{\partial\Theta}{\partial r}\frac{x}{r} \quad , \quad \text{cioè} \quad \rho\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} = \frac{A}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} ,$$

e le altre conducono allo stesso risultato:

$$\rho\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} = A\left(\frac{\partial^2\epsilon}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial\epsilon}{\partial r}\right). \tag{3}$$

Inoltre sulla sfera di raggio a si deve avere

$$2B\frac{\partial u}{\partial r} + (A - 2B)\Theta\frac{\partial x}{\partial r} = 0 ,$$

cioè

$$2B\left(\epsilon\frac{x}{r} + x\frac{\partial\epsilon}{\partial r}\right) + (A - 2B)\left(3\epsilon + r\frac{\partial\epsilon}{\partial r}\right)\frac{x}{r} = 0 ,$$

ovvero, dividendo per $\frac{x}{r}$ e riducendo,

$$Ar\frac{\partial\epsilon}{\partial r} + (3A - 4B)\epsilon = 0. \tag{4}$$

Si tratta di integrare l'equazione (3), in modo che, per $r=a$, sia soddisfatta l'equazione (4).

6. Per trovare una soluzione particolare di (3) poniamo

$$\epsilon = \mathfrak{R}\left[\lambda\cos(kt)+\mu\,\mathrm{sen}(kt)\right]\,, \tag{5}$$

con $\mathfrak{R}$ funzione della sola r, e k costante. Sostituendo in (3) e (4), e ponendo, per semplicità, $\rho k^2 = Ah^2$, si trova facilmente che $\mathfrak{R}$ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d\mathfrak{R}}{dr}+h^2\mathfrak{R}=0\,, \tag{6}$$

in modo che, per $r=a$, si abbia

$$Ar\frac{d\mathfrak{R}}{dr}+(3A-4B)\,\mathfrak{R}=0\,. \tag{7}$$

L'integrazione della (6) è fondata sulle proprietà delle *trascendenti di Bessel,* che non differiscono sostanzialmente dalle funzioni

$$F_n(x)=1-\frac{x^2}{2(n+1)}+\frac{x^4}{2\,.\,4(n+1)(n+3)}-\frac{x^6}{2\,.\,4\,.\,6(n+1)(n+3)(n+5)}+\dots$$

Derivando due volte questa eguaglianza si osserva agevolmente la relazione

$$F''_n(x)+\frac{n}{x}F'_n(x)+F_n(x)=0\,. \tag{8}$$

Ciò premesso, prendiamo $\mathfrak{R}=r^\nu F_n(hr)$. L'equazione (6) diventa

$$F''_n(hr)+\frac{2\nu+4}{hr}F'_n(hr)+\left(1+\frac{\nu(\nu+3)}{h^2r^2}\right)F_n(hr)=0\,,$$

e questa non può coincidere con (8) se non è

$$\nu(\nu+3)=0 \quad , \quad n=2\nu+4\,.$$

Dunque dev'essere $\nu=0$, $n=4$, o $\nu=-3$, $n=-2$, e però si hanno le due seguenti soluzioni particolari dell'equazione (6):

$$\mathfrak{R}=F_4(hr) \quad , \quad \mathfrak{R}=r^{-3}F_{-2}(hr)\,.$$

E poichè la detta equazione è lineare e del secondo ordine, la soluzione generale è

$$\mathfrak{R} = \alpha F_4(hr) + \frac{\beta}{r^3} F_{-2}(hr) . \tag{9}$$

Intanto la funzione $\mathfrak{R}r$ deve serbarsi finita. È dunque necessario che sia $\alpha = 0$ nel caso d'un mezzo indefinito, munito d'una cavità sferica, e $\beta = 0$ nel caso d'una sfera piena. Limitandoci a quest'ultimo caso noi non terremo conto, nell'espressione (9), che del primo termine, ometteremo l'indice 4, oramai inutile, e, preso $\alpha = 1$, scriveremo:

$$\mathfrak{R} = F(hr) = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i (hr)^{2i}}{2.4.\ldots.2i.5.7.\ldots(2i+3)} . \tag{10}$$

7. Posto $ha = x$, si porti l'ultimo risultato nell'equazione (7). Si ottiene

$$AxF'(x) + (3A - 4B) F(x) = 0 ,$$

cioè adoperando lo sviluppo (10),

$$(3A - 4B) - \frac{5A - 4B}{2.5} x^2 + \frac{7A - 4B}{2.4.5.7} x^4 - \frac{9A - 4B}{2.4.6.5.7.9} x^6 + \ldots = 0 .$$

È questa l'equazione trascendente, le cui radici, *tutte reali*, forniscono i valori $k_1, k_2, k_3, \ldots$ di k. Sostituendo un determinato k_i nell'espressione (5) si ottiene una particolare soluzione, e combinando linearmente le soluzioni corrispondenti agli infiniti valori dell'indice i si trova

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{i=\infty} [\lambda_i \cos(k_i t) + \mu_i \operatorname{sen}(k_i t)] F(h_i r) . \tag{11}$$

Ed ora ci resta soltanto da determinare le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ fissando le condizioni iniziali del moto. Supponendo che, all'origine del tempo, un punto qualunque, situato, nel caso del-

l'equilibrio, alla distanza r dal centro, si trovi spostato di $\varphi(r)$, ed animato dalla velocità $\psi(r)$, dimodochè per $t=0$ debba essere

$$\varphi(r)=\epsilon r \quad , \quad \psi(r)=\frac{\partial \epsilon r}{\partial t}=r\frac{\partial \epsilon}{\partial t} ,$$

cioè, utilizzando (11),

$$\frac{\varphi(r)}{r}=\sum_1^\infty \lambda_i F(h_i r) \quad , \quad \frac{\psi(r)}{r}=\sum_1^\infty k_i \mu_i F(h_i r) . \qquad (12)$$

Osserviamo che le funzioni u_i del penultimo capitolo sono qui rappresentate dalle $rF(h_i r)$, e però, riferendoci a quanto si è dimostrato nel detto capitolo, possiamo scrivere, per $i \gtrless j$,

$$\int_0^a F(h_i r) F(h_j r) r^4 dr = 0 .$$

Ciò premesso, moltiplichiamo le equazioni (12) per $F(h_n r) r^4 dr$, ed integriamo fra $r=0$ ed $r=a$. Se si tien conto dell'ultima osservazione si vede che tutti i termini dei secondi membri, tranne i termini n^{imi}, vanno a zero, e si ottiene

$$\lambda_n=\frac{\int_0^a F(h_n r)\varphi(r) r^3 dr}{\int_0^a F^2(h_n r) r^4 dr} \quad , \quad \mu_n=\frac{\int_0^a F(h_n r)\psi(r) r^3 dr}{k_n \int_0^a F^2(h_n r) r^4 dr} .$$

8. Osserviamo, per finire, che la funzione $F_n(x)$, considerata nel § 6, si può, per tutti i valori pari di n, esprimere in forma finita mediante le funzioni trigonometriche. Anzitutto si ha

$$-\frac{n+1}{x}F'_n(x)=1-\frac{x^2}{2(n+3)}+\frac{x^4}{2.4(n+3)(n+5)}-\ldots=F_{n+2}(x).$$

Quando si conosce $F_n(x)$, la formola precedente permette di calcolare F_{n+2}. Inversamente, se si conosce $F_{n+2}(x)$, si ha

$$F_n(x)=1-\frac{1}{n+1}\int_0^x xF_{n+2}(x)\,dx .$$

Ciò premesso, si noti che

$$F_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots = \cos x.$$

Dunque

$$F_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Invece

$$F_2(x) = -\frac{1}{x} F_0'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad , \quad F_4(x) = -\frac{3}{x} F_2'(x) = \frac{3}{x^3}(\operatorname{sen} x - x \cos x).$$

Ora la formola (10) diventa

$$\mathcal{R} = \frac{3}{h^3 r^3}(\operatorname{sen} hr - hr \cos hr),$$

e l'equazione trascendente

$$AxF'(x) + (3A - 4B)F(x) = 0,$$

che deve ammettere infinite radici reali e nessuna immaginaria, si trasforma in

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{Ax}{4B}.$$

Le radici sono le ascisse dei punti nei quali la curva $y = \cot x$ è incontrata dall'iperbole

$$y = \frac{1}{x} - \frac{Ax}{4B}.$$

La rappresentazione grafica ci fa subito scorgere come in ciascun intervallo $(i\pi - \pi, i\pi)$ cada una radice ed una sola. A misura che il numero intero i cresce, la formola

$$ah_i = i\pi - \frac{4B}{i\pi A}$$

tende a diventare esatta, ed i periodi delle infinite vibrazioni componenti tendono, per i infinitamente grande, ad assumere la forma $\frac{2a}{i}\sqrt{\frac{\rho}{A}}$.

PARTE SECONDA

IX. IL PROBLEMA DI DIRICHLET.

1. **Teorema**: *Se una funzione* U, *finita, continua ed uniforme in tutto lo spazio* S, *nel quale soddisfa all'equazione* $\Delta^2 U = \varphi$, *prende in superficie valori prescritti, essa è pienamente determinata.*

In altri termini, ogni soluzione U' dell'equazione differenziale considerata non può avere tutte le proprietà accennate, senza coincidere con U. Si consideri infatti la funzione $V = U - U'$, che in superficie prende valori nulli, e che in tutto S ha il parametro differenzial secondo uguale a zero. Si ha

$$\int \Delta V dS = \sum \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dS = \sum \int \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) dS - \sum \int V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dS ,$$

cioè

$$\int \Delta V dS = - \sum \int V \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds - \sum \int V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dS$$

$$= - \int V \frac{dV}{dn} ds - \int V \Delta^2 V dS .$$

L'ultimo integrale è nullo perchè $\Delta^2 V = 0$ in ogni punto di S; il penultimo è nullo perchè $V = 0$ in ogni punto di s. Dunque

$$\int \Delta V dS = 0 ,$$

e siccome ΔV, somma di quadrati, non ha valori negativi, è necessariamente $\Delta V = 0$ in ogni punto di S, e però

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 .$$

Dunque V è costante, e siccome in superficie ha il valore zero, bisogna che conservi questo valore in tutto S, cioè $U = U'$.

2. **Osservazioni:** *a)* Si dà il nome di *problema di Dirichlet* (*) alla determinazione della funzione U, soddisfacente a tutte le condizioni imposte dall'enunciato del precedente teorema. Non si è finora potuto dimostrare con rigore che una tal funzione esista sempre, e si può soltanto asserire che, se ne esiste una, non può esisterne un'altra, diversa dalla prima. Bisogna tuttavia osservare che ciò non sarebbe più vero quando si venisse a togliere una di quelle condizioni. Presto vedremo, per esempio, che la funzione, se non è obbligata ad essere *finita*, cessa di essere unica;

b) La funzione U, soddisfacente alle suddette condizioni, è, fra tutte le funzioni che assumono in superficie gli stessi valori, quella che rende minimo l'integrale $\int \Delta U dS$. Infatti, quando ad U si attribuiscono variazioni arbitrarie, si ha

$$\frac{1}{2}\delta\int\Delta U dS = \sum\int\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\delta U}{\partial x}dS = -\int\frac{dU}{dn}\delta U ds - \int\Delta^2 U\delta U dS,$$

e poichè in superficie è $\delta U = 0$, si deve avere, perchè $\int \Delta U dS$ sia un minimo,

$$\int\Delta^2 U\delta U dS = 0,$$

per qualunque sistema di variazioni, e conseguentemente $\Delta^2 U = 0$ in ogni punto di S. Questa osservazione basterebbe per dimostrare l'esistenza della funzione U in qualsiasi spazio, se si potesse (*cfr.* VII, 9) ammettere l'esistenza del *minimo* considerato. Disgraziatamente si sa dimostrare soltanto che l'integrale $\int \Delta U ds$, essenzialmente po-

(*) Su questo problema celebre le opere più recenti da consultare sono: Picard, « *Traité d'Analyse* » (Paris, Gauthier-Villars, 1891, t. I, p. 141); Duhem, « *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* » (Paris, Gauthier-Villars, 1891, t. I, p. 159). A quest'ultima fonte si possono attingere indicazioni preziose sulla storia del problema e delle interessanti ed acute ricerche, non ancora chiuse, alle quali esso ha dato luogo.

sitivo, ha un *limite inferiore*, ma non che questo limite debba essere raggiunto necessariamente.

c) Se, in superficie, invece dei valori della funzione, si dànno quelli della sua prima derivata rispetto alla normale, il teorema precedente sussiste, perchè $\frac{dV}{dn}$ sarà uguale a zero su tutta la superficie;

d) Il medesimo teorema si applica più generalmente all'equazione differenziale

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi ,$$

purchè la forma quadratica

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

sia essenzialmente positiva.

3. Teorema di Green. Date due funzioni U e V, finite, continue ed uniformi in tutto S, si consideri l'integrale

$$\int \left(U\Delta^2 V - V\Delta^2 U \right) dS = \sum \int \left(U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dS$$
$$= \sum \int \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x} \right) dS .$$

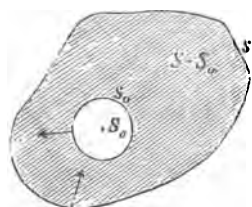
Esso si trasforma nell'integrale di superficie

$$\sum \int \left(V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{dx}{dn} ds = \int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds .$$

È proprio nell'eguaglianza

$$\int (U\Delta^2 V - V\Delta^2 U) dS = \int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds$$

che consiste il *teorema di Green.*

4. Ora, per ottenere quella soluzione di $\Delta^2 U = \varphi$, che assume in superficie un dato sistema di valori, si applichi il teorema di Green alla funzione U ed a $V = \frac{1}{r}$. Con r rappresentiamo la distanza del punto variabile, in cui si calcola V, al punto fisso, ma del resto arbitrario, nel quale si vuole calcolare U. Affinchè il teorema di Green sia applicabile è necessario escludere quest'ultimo punto, perchè in esso la funzione V diventa infinita. Ciò faremo tracciando una sfera di raggio infinitesimo R, col centro nel punto considerato. Nel rimanente spazio $S - S_0$ si può scrivere

$$\int_{S-S_0} \frac{\varphi dS}{r} = \int_{s+s_0} \left(U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} \right) ds ,$$

cioè

$$\int_s \left(U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} \right) ds - \int_S \frac{\varphi dS}{r} = \int_{s_0} \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} ds - \int_{s_0} U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds - \int_{S_0} \frac{\varphi dS}{r} . \quad (1)$$

Vediamo a quali limiti tendono gli integrali del secondo membro quando la sfera tende a svanire. Chiamando μ un conveniente valor medio della funzione φ, in tutto S_0, e μ' un valor medio di $\frac{dU}{dn}$ su tutta s_0, si ha

$$\int_S \frac{\varphi dS}{r} = \mu \int \frac{dS}{r} = 2\pi\mu R^2 , \quad \int_{s_0} \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} ds = \mu' \int \frac{ds}{r} = 4\pi\mu' R .$$

Questi due integrali hanno dunque per limite zero. Invece si ha, chiamando μ un valor medio fra quelli che U assume sulla superficie s_0,

$$- \int_{s_0} U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds = - \mu \int \frac{d\frac{1}{r}}{dr} ds = \mu \int \frac{ds}{r^2} = 4\pi\mu .$$

In forza delle proprietà che si suppongono nella funzione U, μ esiste e tende al valore particolare U che la funzione stessa ha nel punto considerato. Dunque, al limite, la (1) dà

$$U = \frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right)ds - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\varphi dS}{r}. \qquad (2)$$

Questa formola contiene qualche cosa di troppo, perchè fa conoscere U quando sian dati in superficie i suoi valori e quelli della sua prima derivata rispetto alla normale, mentre si è visto che basta prescrivere gli uni o gli altri valori affinchè U sia pienamente determinata. Bisogna dunque cercare di eliminare l'uno o l'altro sistema di valori.

5. Ad un risultato analogo saremmo pervenuti partendo dall'equazione più generale contemplata nel § 2, e sostituendo alla funzione r^2 la forma

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j),$$

cioè una forma quadratica delle differenze delle coordinate, *reciproca* della forma considerata.

6. Dicesi *funzione di Green* e si rappresenta con G una funzione finita, continua ed uniforme, caratterizzata, fra le infinite *funzioni armoniche* (cioè soddisfacenti all'equazione $\Delta^2 = 0$, o *equazione di Laplace*), dalla condizione di prendere in superficie i valori $\frac{1}{r}$. Qui si noti che, se alla funzione non fosse imposto di essere *finita*, si potrebbe prendere la stessa $\frac{1}{r}$, che soddisfa a tutte le altre condizioni. Quando è nota la funzione di Green per un dato spazio S, la risoluzione del problema di Dirichlet è sempre possibile in questo spazio. Infatti si ha, applicando il teorema di Green alle funzioni U e G,

$$\int G\Delta^2 U dS = \int\left(U\frac{dG}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right)ds,$$

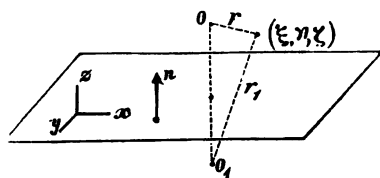
ovvero

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{dG}{dn}\right)ds + \frac{1}{4\pi}\int G\varphi dS.$$

Sommando con (2) si ottiene

$$U = \frac{1}{4\pi}\int U\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dG}{dn}\right)ds + \frac{1}{4\pi}\int\left(G - \frac{1}{r}\right)\varphi dS.$$

È questa la formola che risolve la questione proposta.

7. Esempli: *a)* Nel caso d'uno spazio infinito, limitato da un piano, la funzione di Green si ottiene evidentemente prendendo la distanza r_1 dal punto O_1, simmetrico del punto dato O rispetto al piano. Si ha $G = \frac{1}{r_1}$, ed

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2, \quad r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2.$$

Intanto è

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} = \frac{z-\zeta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} = \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta} = -\frac{z+\zeta}{r_1^3},$$

e però si ha in superficie, cioè per $\zeta = 0$,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dG}{dn} = \frac{2z}{r^3}.$$

Dunque, se si domanda una funzione che nello spazio considerato sia finita, continua ed uniforme, abbia il parametro differenzial secondo espresso dalla funzione φ, e prenda valori prescritti nei punti del piano limite, si ha, per ogni punto (x, y, z),

$$U = \frac{z}{2\pi}\int\frac{Uds}{r^3} + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\varphi dS.$$

b) In particolare una funzione armonica, che nel detto spazio sia finita, continua ed uniforme, è nota mediante la formola

$$U = \frac{z}{2\pi}\int \frac{U ds}{r^3},$$

quando ne sian dati i valori in tutto il piano. Se si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{U ds}{r} = -\int U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} ds = -\int U \frac{z-\zeta}{r^3} ds = -z\int \frac{U ds}{r^3},$$

si può anche scrivere

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{U ds}{r}. \tag{3}$$

Questo risultato ci sarà molto utile in seguito.

c) Suppongasi, più generalmente, che sia data l'equazione $\Delta^2 U = \varphi$, con φ armonica. Quale sarà il valore di U in un punto qualunque (x, y, z)? Se la stessa U fosse armonica, il suo valore sarebbe dato dalla (3). È per questo che,

$$\text{posto} \quad \psi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\varphi ds}{r}, \quad \text{si ha} \quad \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

dove ψ, funzione potenziale (*) di superficie, è anch'essa armonica. Ma si può sempre porre

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{U ds}{r} + U',$$

e la funzione U' deve soddisfare alle condizioni

$$\Delta^2 U' = \varphi \quad , \quad U' = 0 \text{ (in superficie)},$$

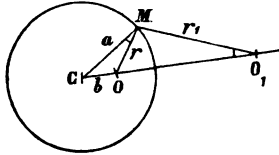
le quali sono verificate se si prende per U' il valore $\frac{1}{2} z\psi$, perchè ψ è sempre finita, ed inoltre, per una nota formola,

$$\Delta^2(z\psi) = z\Delta^2\psi + \psi\Delta^2 z + 2\frac{\partial \psi}{\partial z} = 2\varphi.$$

(*) Di queste funzioni si parlerà alla fine del capitolo.

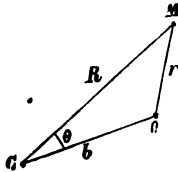
Dunque, in virtù del teorema dimostrato nel § 1, è necessariamente $U' = \frac{1}{2} z\psi$, cioè

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{U ds}{r} - \frac{z}{4\pi}\int\frac{\varphi ds}{r}.$$

d) Anche per lo spazio chiuso in una sfera la funzione di Green ha una forma semplicissima. Il punto O, dal quale si contano le distanze che servono a fissare in superficie i valori della funzione, sia alla distanza b dal centro. Se ne prenda il reciproco O_1 rispetto alla sfera data, e si consideri in superficie un punto qualunque M. Chiamando a il raggio della sfera, è, per costruzione, $CO \cdot CO_1 = a^2$. Ne segue che i triangoli CMO, CMO_1 sono simili; quindi $r_1 : r = a : b$. Per conseguenza

$$G = \frac{a}{br_1},$$

perchè questa funzione, evidentemente finita nell'interno della sfera, è inoltre armonica, continua ed uniforme, ed in superficie assume i valori $\frac{a}{br_1} = \frac{1}{r}$. Ciò premesso, la formola che serve a determinare i valori di ogni altra funzione, che soddisfa alle medesime condizioni, ma che in superficie prende altri valori, arbitrariamente prescritti, diventa nel caso attuale

$$U = \frac{1}{4\pi}\int U\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dR} + \frac{a}{b}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dR}\right) ds,$$

dove R rappresenta la distanza al centro della sfera, dimodochè

$$r^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta,$$

$$r_1^2 = R^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b}R\cos\theta.$$

Ora si ha

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dR} = -\frac{R - b\cos\theta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r_1}}{dR} = -\frac{R - \frac{a^2}{b}\cos\theta}{r_1^3},$$

ed in superficie, cioè per $R=a$,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dR}=-\frac{a-b\cos\theta}{r^3}, \quad \frac{a}{b}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dR}=-\frac{a-\frac{a^2}{b}\cos\theta}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 r^3}=-\frac{\frac{b^2}{a}-b\cos\theta}{r^3};$$

poi

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dR}+\frac{a}{b}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dR}=\frac{a-\frac{b^2}{a}}{r^3}.$$

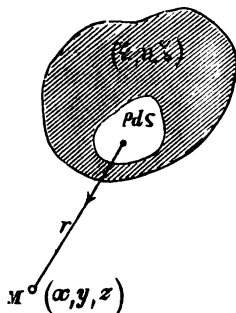
Dunque

$$U=\frac{a^2-b^2}{4\pi a}\int\frac{Uds}{r^3}.$$

Questa è la formola cercata. Essa tende a coincidere con quella ottenuta nel caso del piano, quando a e b crescono all'infinito mentre la differenza $a-b$ si mantiene costantemente uguale a z. Dalla formola trovata si possono poi dedurre varie interessanti conseguenze. Per esempio, se $b=0$, r è sempre uguale ad a, e si ottiene per U il valore

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int Uds.$$

Dunque il valore che U assume nel centro della sfera è la *media aritmetica* degli infiniti valori arbitrariamente prescritti in superficie.

8. Qui è indispensabile un rapido cenno intorno alle *funzioni potenziali*. In ogni particella dS d'un determinato spazio, o sopra ciascun elemento ds d'una superficie data, si immagini accumulata una massa ρdS o ρds, la quale eserciti sull'unità di massa, concentrata in un punto M, azioni newtoniane, cioè proporzionali alle masse ed inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze. Presa come unità la repulsione esercitata dall'unità di massa, all'unità di distanza, l'attrazione della particella dS sul punto M è $-\frac{\rho dS}{r^2}$, e dall'intero corpo emana quindi verso M un'attrazione, la cui componente secondo l'asse delle x è

$$-\int\frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{\rho dS}{r^2}=\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\rho dS=\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\rho dS}{r},$$

se con x, y, z si rappresentano le coordinate del punto M, e con ξ, η, ζ le variabili d'integrazione. Adunque le derivate parziali prime delle funzioni

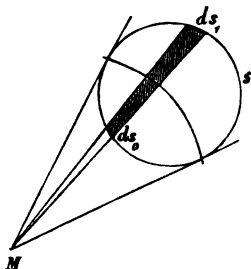
$$V = \int \frac{\rho dS}{r} \quad , \quad V = \int \frac{\rho ds}{r}$$

rappresentano le componenti dell'attrazione subìta dal punto M, e proveniente dalla massa accumulata in S o distribuita su s. Alle funzioni stesse si dà il nome di *funzioni potenziali di spazio* o *di superficie* (*). Queste funzioni *sono armoniche,* tranne la prima nello spazio occupato dalle masse attive. Infatti, fintantochè M è fuori del detto spazio, si ha

$$\Delta^2 V = \int \Delta^2 \frac{1}{r} \cdot \rho dS = 0 \,,$$

perchè $\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$ in ogni punto di S; ma, se M è dentro S, non è lecito asserire ciò, perchè $\frac{1}{r}$ diventa infinita sotto il segno d'integrazione. Per questo caso occorre, innanzi tutto, dimostrare una importante formola, che include come caso limite la formola (9) del *cap.* I.

9. Sia U una funzione finita, continua ed uniforme in un determinato spazio S. Assunto, fuori di S, un polo M, sia r il raggio vettore, e si consideri l'integrale

$$\int \frac{dU}{dr} \frac{dS}{r^2} \,.$$

Alla superficie s, che limita S, si circoscriva dal vertice M un cono, che determina sulla s due regioni, s_0 ed s_1. Distinguiamo con indici 0 ed 1 tutto ciò che riguarda l'una o l'altra regione. Poi conduciamo dal vertice M un cono di apertura infinitesima $d\sigma$, il quale stacca sulle due regioni gli elementi ds_0 e ds_1. L'integrale considerato si può scrivere così:

$$\iint \frac{dU}{dr} dr d\sigma = \int d\sigma \int \frac{dU}{dr} dr = \int (U_1 - U_0) d\sigma = \int_{s_1} U d\sigma - \int_{s_0} U d\sigma \,.$$

E siccome si ha, evidentemente,

$$r_0^2 d\sigma = ds_0 \cos(n_0, r_0) \quad , \quad r_1^2 d\sigma = - ds_1 \,.\, \cos(n_1, r_1) \,,$$

(*) Per lo studio di queste e di altre funzioni potenziali vedi la « *Teorica delle forze newtoniane* » di BETTI ed il « *Traité d'Analyse* » di PICARD.

si può anche dare all'integrale la forma seguente:

$$-\int_{s_1} U\cos(n,r)\frac{ds}{r^2}-\int_{s_0} U\cos(n,r)\frac{ds}{r^2}=-\int_{s} U\cos(n,r)\frac{ds}{r^2}=\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds.$$

Dunque

$$\int\frac{dU}{dr}\frac{dS}{r^2}=\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds.$$

Se poi M è interno ad S (ed è questo il caso che ci interessa) si ha subito, rappresentando con U_0 il valore di U nel punto M,

$$\iint\frac{dU}{dr}dr\,d\sigma=\int d\sigma\int\frac{dU}{dr}dr=\int(U-U_0)d\sigma=\int_s U d\sigma-4\pi U_0,$$

cioè

$$\int\frac{dU}{dr}\frac{dS}{r^2}=\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds-4\pi U_0. \tag{4}$$

Qui si osservi che da questa formola si potrebbe anche dedurre la (2), adoperando la formola (9) del primo capitolo, la quale è applicabile anche quando la funzione sottoposta al segno di integrazione diventa infinita come $\frac{1}{r}$. Pertanto è lecito scrivere

$$\int\frac{dU}{dr}\frac{dS}{r^2}=-\sum\int\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dS=-\sum\int\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)dS+\sum\int\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}dS$$

$$=\sum\int\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dn}ds+\sum\int\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}dS=\int\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}ds+\int\frac{\Delta^2 U}{r}dS.$$

Sostituendo in (4) si ottiene la (2).

10. Ora prendiamo la funzione potenziale

$$V=\int\frac{\rho dS}{r},$$

calcolata in un punto (x, y, z) interno ad S, ed osserviamo che si ha, successivamente,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\rho dS=-\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\rho dS=-\int\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\rho}{r}dS+\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}dS$$

$$=\int\frac{\rho}{r}\frac{d\xi}{dn}ds+\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}dS;$$

poi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d\xi}{dn}\rho ds+\int\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS=-\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dn}\rho ds+\int\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dr}\frac{dS}{r^2},$$

e finalmente, applicando (4), si ottiene la *formola di Poisson:*

$$\Delta^2 V=-\int\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\rho ds+\int\frac{d\rho}{dr}\frac{dS}{r^2}=-4\pi\rho.$$

Segue da ciò che, data l'equazione differenziale $\Delta^2 U=\varphi$, se ne ha subito una soluzione prendendo per U una funzione potenziale di spazio, e supponendo la densità uguale a $-\frac{\varphi}{4\pi}$. In altri termini, una soluzione dell'equazione precedente è

$$V(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

Ne segue che l'integrazione della predetta equazione si può sempre ridurre alla determinazione d'una funzione *armonica*, che prenda in superficie valori prescritti, perchè, posto $U=V+U'$, è chiaro che U' è una funzione armonica, i cui valori in superficie sono gli eccessi dei valori *dati* di U sui valori *noti* di V.

X. ALCUNE PROPRIETÀ DELLE DEFORMAZIONI ELASTICHE.

1. *La deformazione generale d'un corpo elastico si può sempre scomporre in due deformazioni più semplici, cioè una deformazione caratterizzata dall'assenza di* rotazione, *ed una deformazione caratterizzata dall'assenza di* dilatazione *in ciascun punto del corpo, e tale che questo resta sempre limitato dalla stessa superficie.*

Siano u, v, w gli spostamenti che definiscono la deformazione *data,* e si consideri una funzione φ, soddisfacente, con le solite proprietà, all'equazione

$$\Delta^2\varphi=\Theta,$$

in tutto S, mentre in superficie la sua derivata rispetto alla normale prende i valori

$$\frac{d\varphi}{dn}=u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}.$$

Queste condizioni non sono incompatibili, perchè la relazione

$$\int\frac{d\varphi}{dn}ds=\sum\int u\frac{dx}{dn}ds=-\sum\int\frac{\partial u}{\partial x}dS=-\int\theta dS=-\int\Delta^2\varphi dS$$

è soddisfatta. Ciò premesso, si può sempre porre

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+u',\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+v',\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+w',\tag{1}$$

e si vede subito che si ha

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0\tag{2}$$

in tutto S, mentre

$$u'\frac{dx}{dn}+v'\frac{dy}{dn}+w'\frac{dz}{dn}=0\tag{3}$$

in ogni punto della superficie. Le relazioni (2) e (3) dicono precisamente che la deformazione definita dagli spostamenti u', v', w' non produce dilatazione in alcun punto del corpo, e che lo spostamento di qualunque punto della superficie si effettua tangenzialmente alla superficie stessa. È poi evidente che l'altra deformazione componente, definita da spostamenti che ammettono la funzione potenziale φ, non produce rotazione.

2. La decomposizione indicata dalle (1) è indipendente dal significato meccanico di u, v, w: queste possono essere tre funzioni qualunque, finite, continue ed uniformi. Ora si ponga

$$U=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{u'dS}{r},\quad V=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{v'dS}{r},\quad W=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{w'dS}{r},$$

dimodochè, per la formola di Poisson,

$$\Delta^2 U = u' \,, \quad \Delta^2 V = v' \,, \quad \Delta^2 W = w'.$$

Intanto si ha, ripetendo una trasformazione eseguita nel § 10 del capitolo precedente,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{u'}{r} dS - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \xi} dS,$$

cioè

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{u'}{r}\frac{d\xi}{dn} ds - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \xi} dS.$$

Dunque, tenendo presenti (2) e (3),

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Ne segue

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right).$$

E però, se poniamo

$$P = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{4}$$

possiamo scrivere

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}, \\ w &= -\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

3. In altri termini, date tre funzioni u, v, w, dotate delle solite proprietà, se ne possono trovare altre quattro φ, P, Q, R, tali da poter mettere sotto la forma (5) le tre funzioni date. Inoltre si noti che dalle stesse (5), dopo aver osservato che, in virtù delle (4), è

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

si deduce agevolmente

$$\Delta^2\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

$$\Delta^2 P = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} , \quad \Delta^2 Q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} , \quad \Delta^2 R = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

In particolare, se u, v, w sono le componenti d'uno spostamento in una deformazione qualunque, le funzioni φ, P, Q, R son quelle che forniscono, mediante il loro parametro differenzial secondo, i valori della dilatazione cubica e delle doppie componenti della rotazione della particella.

4. Ora la decomposizione (5) si applichi invece alle forze di massa. Vuol dire che esistono quattro funzioni Φ, F, G, H, tali che si può scrivere

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} , \\ Y &= \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} , \\ Z &= -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Così ogni sistema di forze (X, Y, Z) si può decomporre in altri due. Le forze del primo sistema componente ammettono la funzione potenziale Φ: esse sono dette da Betti *forze di dilatazione senza rotazione.* Sono invece *forze di rotazione senza dilatazione* (*) le forze del secondo sistema, che hanno le componenti

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} , \quad \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} , \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} .$$

5. *Il problema dell'equilibrio elastico d'un corpo isotropo è sempre riducibile al caso in cui le forze agiscono soltanto in superficie.*

(*) Queste denominazioni sono giustificate da Betti nella sua « *Teoria* », p. 29.

Le equazioni indefinite

$$X + A\frac{\partial\Theta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right) = 0\,, \quad \text{ecc.}$$

diventano, in virtù delle (6),

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + A\Theta\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(H + B\mathfrak{T}_3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(G + B\mathfrak{T}_2\right) = 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(H + B\mathfrak{T}_3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + A\Theta\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(F + B\mathfrak{T}_1\right) = 0\,, \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(G + B\mathfrak{T}_2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F + B\mathfrak{T}_1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi + A\Theta\right) = 0\,. \end{array}\right.$$

Queste sono soddisfatte quando si prendono uguali a zero le funzioni $\Phi + A\Theta$, $F + B\mathfrak{T}_1$, ecc., cioè quando si pone

$$\Phi + A\Delta^2\varphi = 0\,,\quad F + B\Delta^2 P = 0\,,\quad G + B\Delta^2 Q = 0\,,\quad H + B\Delta^2 R = 0.$$

La teoria delle funzioni potenziali fornisce le seguenti soluzioni particolari:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi A}\int\frac{\Phi dS}{r}\,,$$

$$P = \frac{1}{4\pi B}\int\frac{F dS}{r}\,,\quad Q = \frac{1}{4\pi B}\int\frac{G dS}{r}\,,\quad R = \frac{1}{4\pi B}\int\frac{H dS}{r}\,.$$

Si ottengono così gli spostamenti

$$u' = \frac{1}{4\pi A}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\Phi dS}{r} + \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{G dS}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{H dS}{r}\right)\,, \quad \text{ecc.}$$

i quali soddisfano alle stesse equazioni indefinite, cui debbono soddisfare gli spostamenti incogniti u, v, w. Posto

$$u = u' + u''\,,\quad v = v' + v''\,,\quad w = w' + w''\,,$$

la questione è ora ridotta alla determinazione degli spostamenti residui u'', v'', w'', i quali soddisfano alle equazioni

$$(A - B)\frac{\partial\Theta''}{\partial x} + B\Delta^2 u'' = 0\,, \quad \text{ecc.}$$

come si voleva dimostrare, ed inoltre assumono in superficie i valori di $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$, quando sian conosciuti i valori di u, v, w in ogni punto della superficie. Se invece sono date le forze L, M, N, gli spostamenti u'', v'', w'' debbono soddisfare in superficie alle solite equazioni ai limiti, supponendo che le forze esterne siano $L-L'$, $M-M'$, $N-N'$.

XI. L'EQUAZIONE CANONICA DEI PICCOLI MOTI.

1. Riprendiamo (VII, 1; IV, 5) le equazioni del moto, in assenza di forze di massa, sotto la forma

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=A\frac{\partial\Theta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right), \text{ ecc.}$$

D'ora innanzi poniamo, per brevità, $A=\rho a^2$, $B=\rho b^2$, ed impieghiamo i seguenti simboli operatorii:

$$\mathfrak{D}_a=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta^2\ ,\quad \mathfrak{D}_b=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b^2\Delta^2 .$$

Le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+b^2\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right),\\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+b^2\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial z}\right),\\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+b^2\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial y}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial x}\right).\end{cases}$$

Derivandole rispetto ad x,y,z, poi sommando i risultati, si ottiene $\mathfrak{D}_a\Theta=0$. Derivando invece la seconda equazione rispetto a z, la

terza rispetto ad y, e sottraendo, si trova $\mathfrak{D}_b \mathfrak{T}_1 = 0$, ed analogamente $\mathfrak{D}_b \mathfrak{T}_2 = 0$, $\mathfrak{D}_b \mathfrak{T}_3 = 0$. Dunque *la dilatazione e le componenti della rotazione soddisfano ad un'equazione differenziale* $\mathfrak{D} = 0$.

2. Rappresentato con f_0 il valore di qualunque funzione $f(x,y,z,t)$, per $t = t_0$, conveniamo di rappresentare con $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ il valore di $\frac{\partial f}{\partial t}$ per $t = t_0$. Successivamente si ha

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial t}, \qquad \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt = f - f_0 - (t - t_0) \frac{\partial f_0}{\partial t} = f - f^*,$$

ponendo

$$f^* = f_0 + (t - t_0) \frac{\partial f_0}{\partial t}.$$

Ora, se integriamo (*) due volte rispetto al tempo, fra i limiti t_0 e t, le equazioni del moto, e se poniamo

$$\varphi' = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \Theta dt, \quad P' = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathfrak{T}_1 dt, \quad Q' = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathfrak{T}_2 dt, \text{ ecc.,}$$

otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} u - u^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial y}, \\ v - v^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial z}, \\ w - w^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial P'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial x}. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Ciò premesso, immaginiamo che si applichi alle due terne di funzioni u_0, v_0, w_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t}, \frac{\partial w_0}{\partial t}$ il teorema dimostrato nel *cap.* X

(*) Procedimento indicato da SOMIGLIANA (*Rendic. dell'Acc. dei Lincei*, passim).

(§ 2, 3). È chiaro che si otterranno quattro funzioni φ'', P'', Q', R'', *lineari rispetto al tempo,* e tali che si potrà scrivere

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{\partial\varphi''}{\partial x} + \dfrac{\partial Q''}{\partial z} - \dfrac{\partial R''}{\partial y}, \\ v^* = \dfrac{\partial\varphi''}{\partial y} + \dfrac{\partial R''}{\partial x} - \dfrac{\partial P''}{\partial z}, \\ w^* = \dfrac{\partial\varphi''}{\partial z} + \dfrac{\partial P''}{\partial y} - \dfrac{\partial Q''}{\partial x}, \end{cases}$$

essendo

$$\Delta^2\varphi'' = \Theta \ , \quad \Delta^2 P'' = \mathfrak{T}_1^* \ , \quad \Delta^2 Q'' = \mathfrak{T}_2^* \ , \quad \Delta^2 R'' = \mathfrak{T}_3^*.$$

Ora, se si pone

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' \ , \quad P = P' + P'' \ , \quad Q = Q' + Q'' \ , \quad R = R' + R'',$$

le (1) diventano

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z}, \\ w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \end{cases} \tag{2}$$

ed è facile dimostrare che le funzioni φ, P, Q, R soddisfano tutte ad equazioni differenziali della forma $\mathfrak{D} = 0$. Infatti si ha, tenendo presenti le osservazioni del precedente paragrafo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_a\varphi' &= \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - a^2\Delta^2\varphi' = a^2\Theta - a^4\int_{t_0}^{t} dt\int_{t_0}^{t}\Delta^2\Theta dt \\ &= a^2\Theta^* + a^2\int_{t_0}^{t} dt\int_{t_0}^{t}\mathfrak{D}_a\Theta dt = a^2\Theta^*, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\mathfrak{D}_b P' = b^2\mathfrak{T}_1^* \ , \quad \mathfrak{D}_b Q' = b^2\mathfrak{T}_2^* \ , \quad \mathfrak{D}_b R' = b^2\mathfrak{T}_3^*.$$

Poi

$$\mathfrak{D}_a\varphi'' = \frac{\partial^2\varphi''}{\partial t^2} - a^2\Delta^2\varphi'' = -a^2\Delta^2\varphi'' = -a^2\Theta^*,$$

e

$$\mathfrak{D}_b P'' = -b^2\mathfrak{T}_1^* , \quad \mathfrak{D}_b Q'' = -b^2\mathfrak{T}_2^* \quad \mathfrak{D}_b R'' = -b^2\mathfrak{T}_3^*.$$

Finalmente

$$\mathfrak{D}_a\varphi = 0 , \quad \mathfrak{D}_b P = 0 , \quad \mathfrak{D}_b Q = 0 , \quad \mathfrak{D}_b R = 0 . \tag{3}$$

Dunque alle vibrazioni d'un corpo elastico isotropo si può sempre dare la forma (2), supponendo le funzioni φ, P, Q, R soggette alle condizioni (3). È questo un importante *teorema di Clebsch* (*).

3. Questo teorema mostra che, se si prescinde dalle forze di massa, qualunque moto vibratorio, in un corpo isotropo, *è decomponibile in due moti particolari,* uno caratterizzato dalla variazione di volume delle particelle, e dipendente dalla sola costante A, e l'altro (moto *vorticoso*) caratterizzato invece dalla rotazione delle particelle, e dipendente dalla sola costante B. Nel primo non si ha rotazione, e le vibrazioni ammettono una funzione potenziale φ, il cui parametro differenzial secondo fornisce ad ogni istante ed in ogni punto il valore della dilatazione cubica unitaria. Nel secondo moto, privo di dilatazione, le vibrazioni hanno la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} , \quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

e $\Delta^2 P$, $\Delta^2 Q$, $\Delta^2 R$ sono appunto le doppie componenti della rotazione. Le vibrazioni nel primo moto soddisfano all'equazione differenziale $\mathfrak{D}_a = 0$, nel secondo a $\mathfrak{D}_b = 0$. Dunque *l'integrazione delle equazioni del moto elastico,* nei corpi isotropi, *è sempre riducibile a quella dell'unica equazione* $\mathfrak{D} = 0$, che si chiama l'*equazione canonica dei piccoli moti.*

(*) Vedi il « *Cours de physique mathématique* » di P. Duhem (t. II, p. 267).

4. Sia dunque da integrare (*)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 V = 0 . \tag{4}$$

Dal punto (x, y, z) come centro descriviamo la sfera di raggio $r = at$, e consideriamo l'integrale

$$V = \frac{1}{r} \int F(\xi, \eta, \zeta) ds , \tag{5}$$

esteso alla superficie di tale sfera. Vogliamo dimostrare che questo è un integrale dell'equazione (4). Prima calcoliamo $\Delta^2 V$. Far variare la sola x significa spostare rigidamente la sfera di dx secondo l'asse delle x. Allora F varia di $\frac{\partial F}{\partial x} dx$, e conseguentemente V varia di $\frac{1}{r} \int \frac{\partial F}{\partial \xi} dx ds$. Dunque

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial F}{\partial \xi} ds .$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} ds .$$

Quindi

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r} \int \Delta^2 F . ds .$$

Ora calcoliamo $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, cioè $a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ (poichè $r = at$). Chiamando $d\sigma$ l'apertura del cono infinitesimo, che dal centro della sfera projetta l'elemento ds, si ha $V = r \int F d\sigma$; poi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \int F d\sigma + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int F d\sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} d\sigma \right) .$$

Intanto è noto, pel teorema di Green, che

$$\int \Delta^2 F dS = - \int \frac{\partial F}{\partial n} ds = r^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} d\sigma ,$$

(*) Vedi la « *Théorie mathématique de la lumière* » di H. Poincaré (p. 88).

estendendo la prima integrazione a tutto lo spazio racchiuso nella sfera s. Dunque

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int \Delta^2 F \,.\, dS \,.$$

Ora è chiaro che, quando varia la sola r, non si sposta il centro della sfera, ma solo avviene che questa si dilata intorno al centro, ed il suo raggio diventa $r + dr$. La variazione che subisce $\int \Delta^2 F dS$ è rappresentata da questo stesso integrale, esteso allo spazio compreso fra le superficie sferiche dai raggi r ed $r + dr$. Essa è dunque

$$\int\int \Delta^2 F ds dr = dr \int \Delta^2 F ds \,.$$

Ne segue

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\int \Delta^2 F \,.\, ds \,.$$

È dunque soddisfatta l'equazione (4).

5. Che la formola (5) non fornisca l'integrale generale della (4) risulta subito dal fatto che essa racchiude *una sola* funzione arbitraria, invece di due; ma si trova immediatamente un altro integrale particolare, osservando che, se V soddisfa alla (4), altrettanto si può dire di $\frac{\partial V}{\partial r}$. L'integrale generale è dunque

$$V = \frac{1}{r}\int F ds + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\int G ds\right) .$$

Le funzioni arbitrarie F e G si determinano mediante le condizioni iniziali, cioè prescrivendo i valori V_0 e $\frac{\partial V_0}{\partial t}$ che V e $\frac{\partial V}{\partial t}$ assumono per $t = 0$: siano

$$V_0 = \Phi(x, y, z) \quad , \quad \frac{\partial V_0}{\partial t} = \Psi(x, y, z) .$$

Per vedere a quali condizioni iniziali corrisponde il primo integrale particolare trovato, osserviamo che, per questo integrale, si ha

$$V = r\int F d\sigma \;,\; \frac{\partial V}{\partial r} = \int F d\sigma + \frac{1}{r}\int \Delta^2 F \,.\, dS \;,\; \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = r\int \Delta^2 F \,.\, d\sigma .$$

Dunque, per $t=0$ (e conseguentemente $r=0$), osservando che l'integrale

$$\frac{1}{r}\int \Delta^2 F . dS = \mu \int \frac{dS}{r} = 2\pi\mu r^2$$

ha per limite zero, mentre $\int F d\sigma$ tende a $F(x, y, z)\int d\sigma$, si ha

$$V=0 \;, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi F \;, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 0 \,.$$

Ne segue subito che per l'altro integrale particolare $\left(\text{cioè } \frac{\partial V}{\partial r}\right)$ si ha invece $V=4\pi G$, $\frac{\partial V}{\partial r}=0$. Dunque, per l'integrale generale,

$$V_0 = 4\pi G(x, y, z) \quad , \quad \frac{\partial V_0}{\partial t} = 4\pi a F(x, y, z) \;,$$

e però bisogna prendere $F=\frac{\Psi}{4\pi a}$, $G=\frac{\Phi}{4\pi}$. L'integrale generale, al quale si può dare la forma

$$V = \frac{1}{r}\int F ds + \frac{1}{r^2}\int G ds + \frac{1}{r}\int \frac{\partial G}{\partial r} ds \;,$$

diventa finalmente

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\Psi}{a} + \frac{\Phi}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\frac{ds}{r} \,. \tag{6}$$

Questo risultato si deve a Poisson (*)

6. Supponiamo che V rappresenti una *vibrazione,* e conseguentemente $\frac{\partial V}{\partial t}$ una *velocità.* Se all'origine del tempo vibrano soltanto i punti contenuti in una particella infinitesima, presa intorno al punto (x_0, y_0, z_0), ciò vuol dire che le funzioni Φ e Ψ hanno il

(*) Duhem, *loc. cit.*, t. I, p. 167. Sull'equazione differenziale (4) si hanno importanti ricerche di Kirchhoff nei « *Sitzungsberichte* » di Berlino (1882). Vedi anche una Memoria « sulla propagazione delle onde in un mezzo isotropo » di G. A. Maggi (*Annali di Matematica*, t. XVI, p. 21) ed una del prof. Beltrami « sul principio di Huygens » (*Rendiconti dell'Istituto lombardo*, 1889).

valore 0 in ogni punto dello spazio, tranne che in punti le cui coordinate differiscono infinitamente poco da x_0, y_0, z_0. In tale ipotesi la formola (6) fornisce, in generale, un valore nullo di V, tranne che nei punti (x, y, z) per i quali le differenze $\xi - x_0$, $\eta - y_0$, $\zeta - z_0$ sono simultaneamente infinitesime. E siccome

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

è il quadrato di $r = at$, i detti punti appartengono alla sfera

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2t^2,$$

o le sono infinitamente vicini. In altri termini, se una perturbazione soddisfacente all'equazione canonica dei piccoli moti emana da un punto, essa si trova, alla fine del tempo t, comunicata ai soli punti che distano di at dal punto di partenza, e però si può dire che a è la *velocità di propagazione* della perturbazione considerata. Ora, riferendoci a quanto si è detto nel § 3, vediamo che *ogni perturbazione elastica, provocata in un punto d'un mezzo isotropo, si scinde in due particolari perturbazioni, una priva di rotazione, che si propaga con la velocità* $\mathrm{a} = \sqrt{\frac{A}{\rho}}$, *mentre l'altra, puramente vorticosa, si propaga con la velocità* $\mathrm{b} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$.

XII. CALCOLO DELLA DILATAZIONE E DELLA ROTAZIONE.

1. La più notevole applicazione del teorema (*cap.* V) di Betti consiste nella *determinazione del coefficiente di dilatazione cubica e delle doppie componenti della rotazione della particella* in ogni punto d'un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo. Si prenda

$$u' = \frac{1}{r}\ ,\quad v' = 0\ ,\quad w' = 0\ , \tag{1}$$

rappresentando con r la distanza del punto (ξ, η, ζ) che subisce gli spostamenti u', v', w', ad un punto fisso O, di coordinate x, y, z, preso ad arbitrio nell'interno del corpo. Siccome in questo punto la funzione u' diventa infinita, il teorema di Betti non è applicabile nello spazio S; ma se dal centro O si descrive una sfera arbitrariamente piccola, escludendo così da S lo spazio S_0 racchiuso nella sfera, il teorema di Betti è applicabile nel rimanente spazio $S - S_0$, perchè in questo u' si serba finita, continua ed uniforme. E siccome lo spazio $S - S_0$ è limitato dalle superficie s ed s_0, si ha

$$\int_{S-S_0}(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_{s+s_0}(Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$
$$= \int_{S-S_0}(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_{s+s_0}(L'u + M'v + N'w)\,ds \qquad (2)$$

X', Y', Z', L', M', N' si calcolano mediante le equazioni dell'equilibrio. A questo scopo si noti anzitutto che, nell'ipotesi (1), si ha

$$\Theta' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\ , \quad \mathcal{T}_1' = 0\ , \quad \mathcal{T}_2' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\ , \quad \mathcal{T}_3' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\ ,$$

e però dalle equazioni indefinite risulta, osservando che in ogni punto, tranne che in O, è $\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$,

$$X' = -(A-B)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2}\ , \quad Y' = -(A-B)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \eta}\ , \quad Z' = -(A-B)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \zeta}\ ,$$

mentre le equazioni ai limiti dànno

$$\left\{\begin{aligned} L' &= -(A - 2B)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dn} - B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dn} - B\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\ , \\ M' &= -(A - 2B)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\frac{d\eta}{dn} - B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\frac{d\xi}{dn}\ , \\ N' &= -(A - 2B)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\frac{d\zeta}{dn} - B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\frac{d\xi}{dn}\ . \end{aligned}\right.$$

2. Ciò premesso si ha, *nello spazio* $S - S_0$, integrando per parti,

$$\int (X'u + Y'v + Z'w) dS = -(A-B) \int \left(u \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \eta} + w \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) dS$$

$$= -(A-B) \int \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) \right] dS$$

$$+ (A-B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS ;$$

poi, trasformando il primo integrale in integrale di superficie,

$$\int (X'u + Y'v + Z'w) dS$$

$$= (A-B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds + (A-B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS. \quad (3)$$

Similmente, sulla superficie s,

$$\int (L'u + M'v + N'w) ds = -(A-2B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds$$

$$- B \int u \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds - B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{dn} ds . \quad (4)$$

Sulla superficie s_0 questa formola, osservando che

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{dy}{dr} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}, \quad \text{ecc.}$$

si riduce a

$$\int (L'u + M'v + N'w) ds_0$$

$$= -(A-B) \int \left(u \frac{d\xi}{dr} + v \frac{d\eta}{dr} + w \frac{d\zeta}{dr} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds_0 + B \int \frac{u ds_0}{r^2} . \quad (5)$$

Ora sommando (3) con (4) e (5) si ottiene

$$\int_{S-S_0}(X'u+Y'v+Z'w)dS+\int_{s+s_0}(L'u+M'v+N'w)ds$$

$$=(A-B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds$$

$$+(A-B)\int\left(u\frac{d\xi}{dr}+v\frac{d\eta}{dr}+w\frac{d\zeta}{dr}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds_0-(A-2B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds$$

$$-(A-B)\int\left(u\frac{d\xi}{dr}+v\frac{d\eta}{dr}+w\frac{d\zeta}{dr}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds_0-B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\xi}{dn}ds$$

$$+(A-B)\int_{S-S_0}\Theta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dS-B\int u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds+B\int\frac{uds_0}{r^2}.$$

Fatta ogni riduzione, si vede che la relazione (2) diventa

$$\int_{S-S_0}\frac{XdS}{r}+\int_{s+s_0}\frac{Lds}{r}$$

$$=B\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds+(A-B)\int_{S-S_0}\Theta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dS$$

$$-B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\xi}{dn}ds-B\int u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds+B\int\frac{uds_0}{r^2}.\quad(6)$$

3. Ora si faccia tendere a zero lo spazio S_0. Sia $d\sigma$ l'apertura del cono infinitesimo che da O projetta il contorno d'una particella superficiale ds_0. Evidentemente $ds_0=r^2d\sigma$, e però, chiamando μ un conveniente valore, medio fra quelli che u, funzione finita, assume sulla superficie s_0, si ha

$$\int\frac{uds_0}{r^2}=\int ud\sigma=\mu\int d\sigma=4\pi\mu.$$

Quando la sfera tende ad annullarsi, μ tende al valore che u prende

nel centro O, perchè si suppone ancora che u sia funzione continua ed uniforme. Dunque, per s_0 evanescente,

$$\lim \int \frac{u ds_0}{r^2} = 4\pi u ,$$

rappresentando semplicemente con u il valore di u nel punto (x, y, z). Ancora si osservi che, essendo $dS_0 = r^2 dr d\sigma$, se R è il raggio di S_0, si ha

$$\int \frac{dS_0}{r} = \iint r dr d\sigma = 2\pi R^2 , \quad \int \frac{dS_0}{r^2} = \iint dr d\sigma = 4\pi R ,$$

$$\int \frac{ds_0}{r} = \int r d\sigma = 4\pi R ,$$

e però questi integrali tendono a zero insieme ad R, e con essi tende a zero ogni altro integrale ottenuto moltiplicando le quantità sottoposte all'integrazione per funzioni che restino *finite* in tutto il campo d'integrazione, quali sono per ipotesi X, L, Θ, ecc. Per conseguenza

$$\lim \int \frac{X dS_0}{r} = 0 , \quad \lim \int \frac{L ds_0}{r} = 0 ,$$

$$\lim \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS_0 = - \lim \int \Theta \frac{d\xi}{dr} \frac{dS_0}{r^2} = 0 .$$

Dunque, finalmente, la formola (6) diventa

$$4\pi B u = \int \frac{X dS}{r} + \int \frac{L ds}{r}$$

$$+ B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{dn} ds + B \int u \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds$$

$$- B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds - (A - B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS , \quad (7)$$

e se ne deducono, mediante permutazione circolare, altre due formole analoghe.

4. È utile dare a queste relazioni una forma più concisa. Si ponga

$$\Phi = (A - B)\int \frac{\Theta dS}{r} + B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}. \qquad (8)$$

Siccome la funzione r è la sola che, sotto i segni integrali, contenga x, y, z, si può scrivere

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = (A - B)\int \Theta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS + B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}ds$$

$$= -(A - B)\int \Theta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dS - B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds.$$

Portando in (7) questo risultato, e ponendo per brevità

$$(9)\left\{\begin{aligned}
U &= \int\frac{XdS}{r} + \int\frac{Lds}{r} + B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\xi}{dn}ds + B\int u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds,\\
V &= \int\frac{YdS}{r} + \int\frac{Mds}{r} + B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\eta}{dn}ds + B\int v\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds,\\
W &= \int\frac{ZdS}{r} + \int\frac{Nds}{r} + B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\zeta}{dn}ds + B\int w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds,
\end{aligned}\right.$$

si perviene finalmente alle formole

$$4\pi Bu = U + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad 4\pi Bv = V + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad 4\pi Bw = W + \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad (10)$$

che volevamo dimostrare.

5. Calcolo di Θ, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$. Dalle (10) si deduce subito, mediante opportune derivazioni,

$$4\pi B\mathfrak{T}_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 4\pi B\mathfrak{T}_2 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 4\pi B\mathfrak{T}_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad (11)$$

Invece, derivando le (10) rispetto ad x, y, z, rispettivamente, poi sommando, si ottiene

$$4\pi B\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + \Delta^2\Phi \; ;$$

ma la (8) mostra che Φ è la somma di due funzioni potenziali, una di spazio e l'altra di superficie, e per le proprietà di queste funzioni (*) si può asserire che

$$\Delta^2\Phi = -4\pi(A-B)\Theta .$$

Portando questo risultato nell'ultima formola si trova

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} . \tag{12}$$

Le formole (11) e (12), dovute a Betti (**), fanno conoscere i valori di Θ, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ in ogni punto dello spazio, quando si conoscono le forze esterne e gli spostamenti in superficie. Esse contengono dunque troppi elementi, giacchè dev'essere possibile determinare Θ e le $\mathfrak{T}$ quando in superficie si dànno le sole pressioni o gli spostamenti soli, oltre le forze di massa; ma in seguito si vedrà come si proceda per eliminare, sia gli spostamenti in superficie, sia le pressioni.

6. Calcolo di u, v, w. Le formole (10) non possono servire, come sono, al calcolo di u, v, w, perchè i secondi membri contengono, in Φ, la funzione Θ, il cui calcolo richiede la conoscenza di u, v, w in tutto S, e le sole funzioni U, V, W dipendono, secondo le (9), esclusivamente dalle forze esterne e dagli spostamenti superficiali. Tuttavia si potrebbe provvedere portando in (8) l'espressione di Θ, fornita dalla (12); ma si otterrebbero in tal modo integrali quintupli e sestupli, che conviene evitare. Cerchiamo piut-

(*) Vedi Betti, « *Teorica delle forze newtoniane* », p. 32.

(**) *Teoria della elasticità*, §§ 8, 9. Vedi anche Cerruti, *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, vol. XIII, p. 83.

tosto di esprimere in altro modo quella parte di Φ, che contiene Θ. Con questo scopo si faccia

$$u'=\frac{\partial r}{\partial \xi}\,, \quad v'=\frac{\partial r}{\partial \eta}\,, \quad w'=\frac{\partial r}{\partial \zeta}$$

nel teorema di Betti. Osservando che

$$\Theta'=\Delta^2 r=\frac{2}{r}\,, \quad \mathcal{T}'_1=\mathcal{T}'_2=\mathcal{T}'_3=0\,,$$

le equazioni indefinite dànno

$$X'=-2B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,, \quad Y'=-2B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\,, \quad Z'=-2B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,,$$

e quelle ai limiti

$$\begin{cases} L'=-2(A-2B)\dfrac{1}{r}\dfrac{d\xi}{dn}-2B\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial \xi}\,, \\ M'=-2(A-2B)\dfrac{1}{r}\dfrac{d\eta}{dn}-2B\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial \eta}\,, \\ N'=-2(A-2B)\dfrac{1}{r}\dfrac{d\zeta}{dn}-2B\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial \zeta}\,. \end{cases}$$

Dunque si ha, adoperando le solite trasformazioni, e rammentandosi che la formola (9) del *cap.* I è valida anche quando la funzione sottoposta all'integrazione diventa, in qualche punto, infinita come $\frac{1}{r^n}$, purchè $n<2$,

$$\int (X'u+Y'v+Z'w)\,dS=-2B\int\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)dS$$

$$=-2B\int\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{u}{r}+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{v}{r}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{w}{r}\right)dS+2B\int\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\frac{dS}{r}$$

$$=2B\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}+2B\int\frac{\Theta dS}{r}\,.$$

Similmente

$$\int (L'u+M'v+N'w)\,ds=-2(A-2B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}$$

$$-2B\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)ds\,.$$

Dunque il secondo membro della formola (1) del precedente capitolo diventa

$$2A\int\frac{\Theta dS}{r}+4B\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}$$
$$-2B\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)ds.$$

Per conseguenza

$$\int\frac{\Theta dS}{r}=\frac{1}{2A}\int\left(X\frac{\partial r}{\partial\xi}+Y\frac{\partial r}{\partial\eta}+Z\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)dS$$
$$+\frac{1}{2A}\int\left(L\frac{\partial r}{\partial\xi}+M\frac{\partial r}{\partial\eta}+N\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)ds$$
$$-2\frac{B}{A}\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}$$
$$+\frac{B}{A}\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)ds.$$

Portando finalmente questo risultato nella (8) si ottiene

$$\Phi=\frac{A-B}{2A}\int\left(X\frac{\partial r}{\partial\xi}+Y\frac{\partial r}{\partial\eta}+Z\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)dS$$
$$+\frac{A-B}{2A}\int\left(L\frac{\partial r}{\partial\xi}+M\frac{\partial r}{\partial\eta}+N\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)ds$$
$$-\frac{B}{A}(A-2B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}$$
$$+\frac{B}{A}(A-B)\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right)ds. \qquad (13)$$

Ora si vede che le formole (10), quando vi si esprimono U, V, W e Φ mediante le (9) e la (13), rappresentano gli spostamenti in ogni punto del corpo mediante le forze esterne ed i valori che gli spostamenti stessi prendono in superficie. L'effettiva sostituzione conduce alle *formole di Somigliana* (*), che risolvono per u, v, w, mediante integrazioni doppie e triple, lo stesso problema che le *formole di Betti* risolvono per Θ, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$.

(*) *Annali di Matematica*, 1889, p. 41.

XIII. INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI PER L'EQUILIBRIO ELASTICO DEI CORPI ISOTROPI.

1. Quando in superficie son *dati gli spostamenti,* il problema dell'equilibrio elastico consiste nella ricerca di tre funzioni u, v, w, finite, continue ed uniformi, soddisfacenti alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} X+(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+B\Delta^2 u=0\ , \\ Y+(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+B\Delta^2 v=0\ , \\ Z+(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+B\Delta^2 w=0\ , \end{aligned}\right. \tag{1}$$

in tutto uno spazio dato, alla superficie del quale assumano valori prescritti. Per una formola di Betti, dimostrata precedentemente, si ha

$$\begin{aligned} -4\pi A\Theta = & \int\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dS \\ & +\int\left(L\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)ds \\ & +2B\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)ds\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Il secondo integrale è il solo che, nell'attuale problema, non sia conosciuto. Per calcolarlo supponiamo che, per un espediente qualsiasi, si sia pervenuti alla conoscenza di tre funzioni u', v', w', finite, continue ed uniformi, soddisfacenti alle (1) quando si pon-

gono uguali a zero le forze di massa, e tali che in superficie si abbia

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,, \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\,, \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,.$$

Il teorema di Betti, applicato a questi ed agli spostamenti incogniti, dà

$$\int (Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int \left(L\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + M\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + N\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) ds$$
$$= \int (L'u + M'v + N'w)\,ds\,, \qquad (3)$$

dove L', M', N' si calcolano mediante le note equazioni ai limiti

$$\left\{ \begin{aligned} L' &= -(A-2B)\,\Theta' \frac{d\xi}{dn} - 2B\,\frac{du'}{dn} - B\left(\mathfrak{T}'_3 \frac{d\eta}{dn} - \mathfrak{T}'_2 \frac{d\zeta}{dn} \right), \\ M' &= -(A-2B)\,\Theta' \frac{d\eta}{dn} - 2B\,\frac{dv'}{dn} - B\left(\mathfrak{T}'_1 \frac{d\zeta}{dn} - \mathfrak{T}'_3 \frac{d\xi}{dn} \right), \\ N' &= -(A-2B)\,\Theta' \frac{d\zeta}{dn} - 2B\,\frac{dw'}{dn} - B\left(\mathfrak{T}'_2 \frac{d\xi}{dn} - \mathfrak{T}'_1 \frac{d\eta}{dn} \right). \end{aligned} \right. \qquad (4)$$

Ora Θ si può ritenere come conosciuta mediante la formola (2), nella quale si sostituisce al secondo integrale il valore fornito dalla (3). Portando poi il valore di Θ nelle (1), queste forniscono $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$, e però le funzioni u, v, w, delle quali son noti i valori in superficie, si possono determinare ricorrendo alle considerazioni del *cap.* IX.

2. Quando in superficie son *date le forze esterne,* bisogna previamente conoscere, non uno, ma quattro sistemi di spostamenti ausiliarii, provocati da sole forze superficiali, che abbiano rispettivamente le seguenti espressioni:

$$L' = -2B\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \qquad M' = -2B\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \qquad N' = -2B\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,,$$

$$L_1 = B\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,, \qquad M_1 = B\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad N_1 = B\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

$$L_2 = B\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad M_2 = B\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \qquad N_2 = B\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

$$L_3 = B\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad M_3 = B\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \quad N_3 = B\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}.$$

Si è posto, per brevità, $\varphi = \frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ e

$$\varphi_1 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{dn} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{dn}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{dn} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{dn}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{dn}.$$

Applicando il teorema di Betti agli spostamenti u', v', w', ed agli spostamenti incogniti, si ottiene

$$\int (Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int (Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$
$$= -2B\int\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + v\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + w\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) ds.$$

Quindi la (2) diventa

$$4\pi A\Theta = \int\left[X\left(u' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right) + Y\left(v' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\right) + Z\left(w' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)\right] dS$$
$$+ \int\left[L\left(u' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right) + M\left(v' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\right) + N\left(w' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)\right] ds.$$

Ora Θ si può riguardare come conosciuta. Analogamente si ha

$$\int (Xu_1 + Yv_1 + Zw_1)\,dS + \int (Lu_1 + Mv_1 + Nw_1)\,ds$$
$$= B\int\left(u\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + v\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + w\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}\right) ds + B\int\left(w\frac{\partial \varphi}{\partial y} - v\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) ds;$$

e siccome, per altre note formole, è

$$-4\pi B\mathfrak{T}_1 = \int\left(Z\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - Y\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) dS + \int\left(N\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - M\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) ds$$
$$+ B\int\left(w\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - v\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) ds + B\int\left(u\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + v\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + w\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}\right) ds,$$

è pure

$$4\pi B\mathfrak{T}_1 = -\int \left[Xu_1 + Y\left(v_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) + Z\left(w_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\right)\right] dS$$
$$-\int \left[Lu_1 + M\left(v_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) + N\left(w_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\right)\right] ds.$$

Così anche $\mathfrak{T}_1$, ed analogamente $\mathfrak{T}_2$ e $\mathfrak{T}_3$, vengono ad essere conosciuti.

3. Ciò premesso, per determinare u si hanno le condizioni

$$X + (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u = 0$$

in tutto S, ed in superficie

$$L + (A - 2B)\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\frac{du}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\right) = 0,$$

le quali fanno conoscere il valore di $\Delta^2 u$ in ogni punto dello spazio, e quello di $\frac{du}{dn}$ in superficie, dimodochè la funzione u viene ad essere determinata, purchè sia soddisfatta la condizione

$$\int \frac{du}{dn} ds = -\int \Delta^2 u dS.$$

Per verificare questa eguaglianza si osservi che le equazioni ai limiti dànno

$$\int L ds + 2B\int \frac{du}{dn} ds = \int \left[(A - 2B)\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + B\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \zeta}\right)\right] dS.$$

In virtù della nota identità

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial z}$$

si può anche scrivere

$$\int L ds + 2B\int \frac{du}{dn} ds = \int \left[(A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - B\Delta^2 u\right] dS$$
$$= -\int X dS - 2B\int \Delta^2 u dS.$$

Dunque

$$\int \frac{du}{dn} ds = -\int \Delta^2 u dS - \frac{1}{2B}\left(\int X dS + \int L ds\right) = -\int \Delta^2 u dS .$$

Questo metodo d'integrazione è dovuto a Betti (*): i dettagli che si richiedono per la sua applicazione sono stati largamente esposti dal prof. Cerruti nelle sue « ricerche intorno all'equilibrio dei corpi e'astici isotropi » (**).

4. È facile immaginare altri procedimenti per l'integrazione, fondati sempre sulla preliminare conoscenza di sistemi di spostamenti, soddisfacenti tutti alle (1), in assenza di forze di massa, e caratterizzati dai valori che assumono in superficie. Così, per esempio, partendo dalle formole

$$4\pi B u = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad 4\pi B v = V + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad 4\pi B w = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

nelle quali è

$$U = \int \frac{XdS}{r} + \int \frac{Lds}{r} + B\int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B\int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) \frac{d\xi}{dn} ds,$$

$$V = \int \frac{YdS}{r} + \int \frac{Mds}{r} + B\int v \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B\int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) \frac{d\eta}{dn} ds,$$

$$W = \int \frac{ZdS}{r} + \int \frac{Nds}{r} + B\int w \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B\int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) \frac{d\zeta}{dn} ds,$$

$$\Phi = (A - B)\int \frac{\Theta dS}{r} + B\int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn}\right) \frac{ds}{r},$$

si presentano subito due metodi per l'integrazione. Se si riesce ad ottenere un sistema di spostamenti, i quali assumano in superficie

(*) *Teoria della elasticità*, p. 81.

(**) *Accademia dei Lincei*, 1882, pp. 83, 87, 105. Vedi anche due comunicazioni di Boussinesq all'Accademia di Parigi (*Comptes-rendus*, 9 et 16 Avril, 1888).

i valori $\frac{\partial r}{\partial \xi}, \frac{\partial r}{\partial \eta}, \frac{\partial r}{\partial \zeta}$, si può ritenere, mercè il teorema di Betti, che la funzione Φ è conosciuta, perchè si è visto altrove che ad essa si può anche dar la forma

$$\begin{aligned}\Phi = &\frac{A-B}{2A}\int\left(X\frac{\partial r}{\partial \xi}+Y\frac{\partial r}{\partial \eta}+Z\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)dS\\ &+\frac{A-B}{2A}\int\left(L\frac{\partial r}{\partial \xi}+M\frac{\partial r}{\partial \eta}+N\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)ds\\ &-\frac{B}{A}(A-2B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn}+v\frac{d\eta}{dn}+w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}\\ &+\frac{B}{A}(A-B)\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \xi}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \eta}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)ds\,.\end{aligned}$$

Ora U, V, W debbono in tutto S soddisfare alle equazioni

$$\Delta^2 U = -4\pi X \quad , \quad \Delta^2 V = -4\pi Y \quad , \quad \Delta^2 W = -4\pi Z \; ,$$

ed assumere in superficie gli stessi valori di

$$4\pi B u - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad 4\pi B v - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad 4\pi B w - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,.$$

5. Si può invece cominciare dalla determinazione di U, V, W, quando si riesca a determinare tre sistemi di spostamenti, che in superficie prendano rispettivamente i valori

$$\begin{aligned}u' &= \frac{1}{r} \;, & v' &= 0 \;, & w' &= 0 \;,\\ u'' &= 0 \;, & v'' &= \frac{1}{r} \;, & w'' &= 0 \;,\\ u''' &= 0 \;, & v''' &= 0 \;, & w''' &= \frac{1}{r} \;,\end{aligned}$$

ed in tutto lo spazio considerato verifichino le (1) per $X=Y=Z=0$. Il teorema di Betti dà subito

$$\begin{aligned}\int\frac{L ds}{r} &= \int(L'u+M'v+N'w)ds - \int(Xu'+Yv'+Zw')dS\,,\\ \int\frac{M ds}{r} &= \int(L''u+M''v+N''w)ds - \int(Xu''+Yv''+Zw'')dS\,,\\ \int\frac{N ds}{r} &= \int(L'''u+M'''v+N'''w)ds - \int(Xu'''+Yv'''+Zw''')dS\,.\end{aligned}$$

Così possiamo ritenere conosciute le funzioni U, V, W, ed anche Θ, giacchè si ha

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Dunque è nota la funzione Φ. Questa si potrebbe anche determinare osservando che soddisfa all'equazione

$$\Delta^2 \Phi = -4\pi (A - B)\Theta ,$$

mentre in superficie la sua derivata prima rispetto alla normale assume i valori

$$(4\pi Bu - U)\frac{dx}{dn} + (4\pi Bv - V)\frac{dy}{dn} + (4\pi Bw - W)\frac{dz}{dn} ;$$

ma il metodo esposto nel § 1 è incontestabilmente il più semplice di tutti.

XIV. APPLICAZIONE AI SUOLI ELASTICI ISOTROPI.

1. Per ben mettere in chiaro il precedente processo d'integrazione, nel caso che in superficie sian dati gli spostamenti, applichiamolo ad un *suolo* elastico, omogeneo ed isotropo, cioè ad un solido indefinito, limitato da un piano. La prima questione che si presenta è la *determinazione degli spostamenti ausiliarii* u', v', w'. Questi debbono soddisfare, in tutto lo spazio considerato, alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &(A - B)\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + B\Delta^2 u' = 0 , \\ &(A - B)\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + B\Delta^2 v' = 0 , \\ &(A - B)\frac{\partial \Theta'}{\partial z} + B\Delta^2 w' = 0 . \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Se si rappresentano con r_1 le distanze al punto simmetrico (rispetto al piano limite) di quello a partire dal quale si contano le distanze r, si ha

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,\quad r_1^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2,$$

e però in superficie, cioè per $\zeta=0$,

$$\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}.$$

Ne segue che le funzioni u', v', w', se, invece di soddisfare alle (1), dovessero essere armoniche, sarebbero uguali a

$$\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta},$$

perchè queste sono armoniche, finite, continue ed uniformi in tutto lo spazio che si considera. Ciò premesso, prendiamo a considerare una delle equazioni (1), per esempio la prima. Siccome la dilatazione cubica, in assenza di forze di massa, è una funzione armonica, possiamo, per osservazioni fatte nel *cap.* IX, porre

$$\Theta'=\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta},$$

dove ϑ è anch'essa armonica. L'equazione considerata diventa, nel punto (ξ, η, ζ),

$$\Delta^2 u'=-\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{A-B}{B}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right),$$

e però si ha, per le medesime osservazioni,

$$u'=\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi}-\frac{A-B}{2B}\zeta\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}.$$

Analogamente

$$v'=\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta}-\frac{A-B}{2B}\zeta\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta},\quad w'=-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta}-\frac{A-B}{2B}\zeta\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}.$$

Per determinare ϑ si osservi che dalle ultime tre relazioni, derivate rispetto a ξ, η, ζ, si deduce

$$\Theta' = -2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta^2} - \frac{A-B}{2B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(-2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} - \frac{A-B}{2B} \vartheta\right).$$

Si può dunque porre

$$\vartheta = -2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} - \frac{A-B}{2B} \vartheta,$$

e ricavarne

$$\vartheta = -\frac{4B}{A+B} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta},$$

giacchè questa funzione è armonica. Dunque

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \xi} + 2 \frac{A-B}{A+B} \zeta \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \xi \partial \zeta}, \\ v' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \eta} + 2 \frac{A-B}{A+B} \zeta \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \eta \partial \zeta}, \\ w' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} + 2 \frac{A-B}{A+B} \zeta \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta^2}. \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

2. La seconda questione da risolvere è la *determinazione della dilatazione cubica*. Prima calcoliamo L', M', N' mediante le formole (4) del precedente capitolo. Queste, osservando che $\frac{d\xi}{dn} = \frac{d\eta}{dn} = 0$ e $\frac{d\zeta}{dn} = 1$, assumono la forma semplicissima

$$L' = -B\left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \frac{\partial w'}{\partial \xi}\right), \quad M' = -B\left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta} + \frac{\partial w'}{\partial \eta}\right),$$

$$N' = -2B \frac{\partial w'}{\partial \zeta} - (A-2B)\Theta';$$

quindi dànno, per sostituzione delle (2), e prendendo i valori in superficie ($\zeta = 0$),

$$\left\{\begin{aligned} L' &= -2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial\xi\partial\zeta} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta}, \\ M' &= -2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial\eta\partial\zeta} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta}, \\ N' &= \quad 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial\zeta^2} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}. \end{aligned}\right.$$

Adunque si ha

$$\int (L'u + M'v + N'w)ds$$
$$= 2B\frac{A-B}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds.$$

Analogamente l'ultimo integrale della formola (2) del precedente capitolo si riduce a

$$2B\int\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds,$$

e però la formola stessa, quando vi si porta il risultato (3) del medesimo capitolo, diventa

$$4\pi A\Theta = \int\left[X\left(u' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi}\right) + Y\left(v' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta}\right) + Z\left(w' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\right]dS$$
$$-\frac{4AB}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds.$$

Così è nota la dilatazione cubica.

3. Per proseguire con formole semplici trascuriamo le forze di massa. L'ultima formola diventa

$$\pi\Theta = -\frac{B}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds.$$

Poniamo

$$P=\int\frac{u\,ds}{r}\ ,\quad Q=\int\frac{v\,ds}{r}\ ,\quad R=\int\frac{w\,ds}{r}\ ,$$

e

$$\varphi=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Questi integrali, tutti noti, soddisfano tutti, come funzioni potenziali di superficie, all'equazione di Laplace. Intanto si ha

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}=\int u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}ds=\int u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta}ds\ ,\quad \text{ecc.}$$

e però

$$\pi\Theta=-\frac{B}{A+B}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right),$$

cioè

$$\pi\Theta=-\frac{B}{A+B}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ .$$

4. Passiamo alla terza ed ultima parte della questione: *determinazione degli spostamenti*. Questi debbono soddisfare alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned}\Delta^2 u&=\frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\ ,\\ \Delta^2 v&=\frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\ ,\\ \Delta^2 w&=\frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\ .\end{aligned}\right.$$

Se in superficie si dovesse avere $u=0$, $v=0$, $w=0$, i valori di queste funzioni in tutto lo spazio considerato sarebbero

$$\frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ ,\quad \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\quad \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ .$$

Se, invece, u, v, w dovessero soddisfare all'equazione di Laplace,

assumendo in superficie i valori assegnati, i loro valori in tutto lo spazio sarebbero

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z}\,,\quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z}\,,\quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Dunque finalmente

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\\ v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\\ w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

5. Il prof. Cerruti ha trattato il problema precedente « per dare un'illustrazione abbastanza facile del metodo generale » proposto da Betti. Quando non si ha in vista questo scopo, ma si vuole soltanto raggiungere la soluzione del problema dei suoli elastici, è ben facile pervenire con procedimento più rapido e diretto alle formole generali ottenute dal prof. Cerruti, e ciò senza rinunciare a « condurre la soluzione in modo che possa somministrare qualche lume per la trattazione di problemi analoghi, per corpi di forma più complicata » (*). Basta infatti riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica Θ, calcolar poi gli spostamenti (u, v, w), e dedurne l'espressione di Θ: questa funzione si trova così isolata in una relazione che serve a determinarla. Tutte le difficoltà del problema risiedono pertanto nella determinazione di Θ, ma non sono più gravi di quelle che occorre superare per la determinazione degli spostamenti ausiliarii nel metodo di Betti. E nel particolare problema trattato dal prof. Cerruti spariscono le difficoltà appunto perchè la funzione Θ viene a figurare linearmente nelle relazioni che valgono a determinarla.

(*) Cerruti, *loc. cit.*, p. 81. Il problema dei suoli elastici è stato trattato, fin dal 1878, dal Boussinesq. Vedi la « *Théorie* » di Clebsch, p. 375.

6. Le difficoltà dell'integrazione spariscono anche per una molto favorevole circostanza, che si presenta continuamente nel problema considerato, cioè che ogni funzione armonica si può far derivare, con qualunque numero di successive derivazioni parziali rispetto alla z, da un'altra funzione armonica, supponendo che l'asse delle z sia stato preso perpendicolare al piano limite. Infatti si è visto nel *cap.* IX che, se $\Delta^2\varphi = 0$, si ha

$$\varphi = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\varphi ds}{r}.$$

Intanto si osservi che

$$\text{per} \quad \zeta = 0 \quad \text{è} \quad \frac{\partial}{\partial z}\log(z+r) = \frac{1}{r},$$

e, per conseguenza,

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2\pi}\int\varphi\log(z+r)\,ds.$$

Analogamente si ottiene

$$\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_3 = -\frac{1}{2\pi}\int\varphi[z\log(z+r) - r]\,ds;$$

ecc. Rammentiamo ancora che, per soddisfare all'equazione $\Delta^2 U = \varphi$, quando φ è armonica, bisogna prendere

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{Uds}{r} + \frac{1}{2}z\varphi_1, \tag{4}$$

se in superficie, cioè per $z = 0$, si prescrivono i valori di U. Supponiamo invece che si assegnino i valori di $\frac{\partial U}{\partial z}$. Se U fosse armonica, siccome l'integrale $-\frac{1}{2\pi}\int\frac{Vds}{r}$ è tale che la sua derivata rispetto a z è uguale a V, basterebbe sostituirvi a V i valori prescritti per $\frac{\partial U}{\partial z}$, per ottenere U. In ogni caso si può porre

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{ds}{r} + U',$$

e la funzione U' soddisfa a $\Delta^2 U' = \varphi$, mentre i valori di $\frac{\partial U'}{\partial z}$ si annullano in superficie. Ne segue che, se si pone $U' = \frac{1}{2}(z\varphi_1 - \psi)$, ψ è armonica, e si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\varphi_1 - \psi) = 0 \ , \quad \text{cioè} \quad \varphi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

Dunque $\psi = \varphi_2$, e conseguentemente

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{ds}{r} + \frac{1}{2}(z\varphi_1 - \varphi_2) . \tag{5}$$

7. Ciò premesso, supponiamo che la questione sia stata già ridotta, come sempre si può, al caso in cui le forze esterne agiscono soltanto in superficie, dimodochè debbasi avere, per $z \gtreqq 0$,

$$\left\{\begin{aligned} (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u = 0 \ , \\ (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + B\Delta^2 v = 0 \ , \\ (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + B\Delta^2 w = 0 , \end{aligned}\right.$$

e, per conseguenza,

$$\Delta^2 \Theta = 0 \ , \quad \Theta = \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = \dots$$

Se alle equazioni precedenti si dà la forma

$$\Delta^2 u = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x \partial z} \ , \quad \Delta^2 v = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y \partial z} \ ,$$
$$\Delta^2 w = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} \ ,$$

si vede subito, in virtù delle (4), che si ha

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{A-B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \ , \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{A-B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} \ , \\ w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{A-B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} . \end{aligned}\right.$$

Da queste formole si deduce, derivandole rispetto ad x, y, z, poi sommando,

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{A-B}{2B}\frac{\partial\Theta_1}{\partial z};$$

quindi

$$\Theta = -\frac{B}{\pi(A+B)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \Theta_1 = -\frac{B\varphi}{\pi(A+B)}.$$

Sostituendo questi risultati nelle formole precedenti si ricade sulle formole (3), ottenute dal prof. Cerruti pel caso che in superficie si diano gli spostamenti (*).

8. Sono invece date le forze superficiali (L, M, N)? Bisogna allora ricorrere alla formola (5). La componente w dello spostamento deve soddisfare, per $z \gtreqq 0$ e per $z = 0$ rispettivamente, alle equazioni

$$\Delta^2 w = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial\Theta}{\partial z}, \quad N + (A-2B)\Theta + 2B\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dalla (5) si deduce

$$w = \frac{1}{4\pi B}\int\frac{N ds}{r} + \frac{A-2B}{4\pi B}\int\frac{\Theta ds}{r} + \frac{A-B}{2B}(\Theta_1 - z\Theta),$$

cioè

$$w = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z} + \frac{1}{2}\Theta_1 - \frac{A-B}{2B}z\Theta, \tag{6}$$

dopo aver posto

$$\mathfrak{L} = \int L\log(z+r)ds, \quad \mathfrak{M} = \int M\log(z+r)ds,$$
$$\mathfrak{N} = \int N\log(z+r)ds,$$

ed osservato che

$$\int\frac{N ds}{r} = \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}, \quad \int\frac{\Theta ds}{r} = -2\pi\Theta_1.$$

(*) Cerruti, *loc. cit.*, form. (41).

Ora la funzione u deve soddisfare all'equazione

$$\Delta^2 u = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x \partial z}$$

in tutto lo spazio considerato, mentre in superficie si deve avere

$$L + B\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 .$$

Dunque, adoperando la formola (5),

$$u = \frac{1}{2\pi B}\int\frac{L ds}{r} + \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{ds}{r} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial x}(\Theta_2 - z\Theta_1) . \qquad (7)$$

D'altronde, se per dare alla (6) la forma

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{A-B}{2B} z\Theta$$

si pone

$$f = \frac{\mathfrak{N}}{4\pi B} + \frac{1}{2}\Theta_2 ,$$

si ha pure

$$\int\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{ds}{r} = \int\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta}\frac{ds}{r} = -2\pi\frac{\partial f}{\partial x} ,$$

e la (7) diventa

$$u = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial x}(\Theta_2 - z\Theta_1) . \qquad (8)$$

Analogamente si ha

$$v = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial y} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial y}(\Theta_2 - z\Theta_1) ,$$

e si può finalmente scrivere la (6) così:

$$w = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial z}(\Theta_2 - z\Theta_1) + \Theta_1 .$$

Dalle ultime tre formole, ponendo

$$\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z},$$

si deduce, mediante derivazione,

$$\Theta = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{A-B}{2B}\Delta^2(z\Theta_1) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{A-2B}{B}\Theta,$$

cioè

$$\Theta = \frac{1}{2\pi(A-B)}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \Theta_1 = \frac{\psi}{2\pi(A-B)}, \quad \Theta_2 = \frac{\chi}{2\pi(A-B)},$$

purchè, dopo aver posto

$$\mathfrak{L} = \int L\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

$$\mathfrak{M} = \int M\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

$$\mathfrak{N} = \int N\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

si prenda

$$\chi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}.$$

Ora l'eguaglianza (6) si cambia nella formola nota (*)

$$w = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z} + \frac{\psi}{4\pi(A-B)} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \qquad (9)$$

Invece la (8) diventa

$$u = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial x}(\chi - z\psi),$$

ovvero

$$u = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\right).$$

(*) CERRUTI, *loc. cit.*, form. (58).

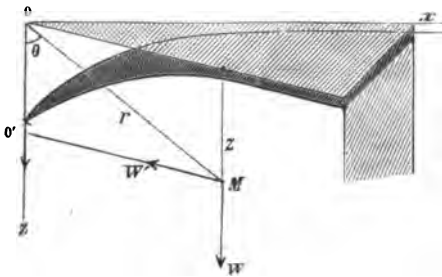
Se poi si osserva che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial x}=\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \partial y},$$

si ottengono finalmente le formole (*)

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}-\frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right),\\ v&=\frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}-\frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial y}-\frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right),\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

che insieme alla (9) risolvono completamente il problema dei suoli elastici, sottoposti a qualunque sistema noto di pressioni superficiali.

9. Supponiamo, per esempio, che un suolo orizzontale sopporti, in un punto O, una pressione verticale, che assumeremo ad unità.

Ciò si deve intendere nel senso che, presa alla superficie del suolo, intorno ad O, una particella piccolissima, su di essa venga distribuita la pressione in guisa che, calcolato per unità di superficie, il suo valore, grandissimo nei punti centrali della particella, diventi invece piccolissimo, pur variando in modo continuo, nelle vicinanze del contorno, e sul contorno stesso si annulli. Così è rispettata la continuità delle pressioni superficiali, richiesta per l'applicazione delle precedenti teorie; ma, siccome noi non supporremo piccolissima la particella, sì bene infinitesima, i nostri risultati non saranno validi nel punto O; ed anche in punti vicinissimi ad O si dovranno considerare come approssimativi. Ciò premesso, si ha

$$L=\mathcal{L}=\mathfrak{L}=0\ ,\quad M=\mathcal{M}=\mathfrak{M}=0\ ,$$

(*) Cerruti, *loc. cit.*, form. (63).

$$\int N ds = 1 \;,\quad \mathfrak{N} = \log(z+r) \;,\quad \mathfrak{N} = z\log(z+r) - r \;,$$

$$\psi = \frac{1}{r} \;,\quad \chi = \log(z+r) \;,\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Quindi le formole (9) e (10), nelle quali si pone

$$w' = -\frac{ux+vy}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,\; \sqrt{x^2+y^2} = r \operatorname{sen}\theta \,,\; z = r\cos\theta \,,\; \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

diventano

$$w = \frac{1}{4\pi B r}\left(\frac{A}{A-B} + \cos^2\theta\right) \,,$$

$$w' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi B r}\left(\frac{B}{A-B}\frac{1}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right).$$

In ogni punto M il suolo subisce dunque un *abbassamento* w ed una contrazione w', inversamente proporzionali alla distanza di M al punto di applicazione della pressione. Veramente si ha una *contrazione* verso la direzione della forza solo nei punti esterni al cono definito da quel valore di θ, per cui si ha

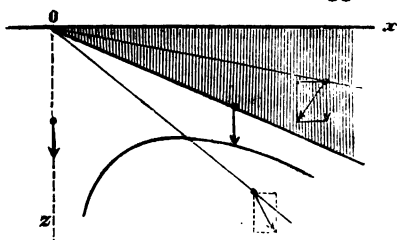
$$\frac{B}{A-B} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} = \cos\theta \,,$$

vale a dire

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A+3B}{A-B}} - 1\right).$$

In particolare, per quei corpi che più si accostano alla legge di Navier e Poisson, $\cos\theta$ è presso a poco uguale ad $\frac{1}{3}$. Il cono corrispondente al trovato valore di θ non fa che abbassarsi deformandosi, e tende ad espellere, per così dire, le particelle

interne, mentre in pari tempo le particelle esterne tendono a col-

mare il vuoto lasciato dalle prime. Finalmente alla superficie del suolo, escluso il punto O, si ha

$$\frac{w}{A} = \frac{w'}{B} = \frac{1}{4\pi(A-B)Br} ,$$

e però la superficie stessa prende la forma iperbolica indicata dalla prima figura (*).

XV. DEFORMAZIONI TERMICHE.

1. Ad un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, si comunichi una piccolissima quantità di calore, dimodochè la temperatura di ogni sua particella dS si elevi di τdS, essendo τ una funzione finita, continua ed uniforme delle coordinate del centro della particella. È noto che, se k è il coefficiente di dilatazione lineare, ogni elemento lineare subisce, per unità di lunghezza, un allungamento $k\tau$, dimodochè si ha, per tutte le direzioni (α, β, γ),

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = k\tau ,$$

cioè

$$a = b = c = k\tau \quad , \quad f = g = h = 0 .$$

Adunque la deformazione prodotta dall'elevazione di temperatura, quando la si consideri in sè, cioè indipendentemente dalle azioni elastiche che può provocare, non produce scorrimenti, ma solo dilatazioni $k\tau$ in tutte le direzioni.

2. Ma è ben chiaro che, in generale, il calore così comunicato, facendo variare le posizioni relative delle particelle, desta dappertutto tensioni elastiche, e però la deformazione prodotta, caratte-

(*) Altri interessanti casi particolari sono stati discussi dal Boussinesq nel « *Traité* » di Clebsch, p. 390.

rizzata dalle solite funzioni a, b, c, f, g, h, si può ritenere come risultante dalla deformazione

$$k\tau\,,\ k\tau\,,\ k\tau\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,$$

puramente *termica*, e dall'altra

$$a - k\tau\,,\ b - k\tau\,,\ c - k\tau\,,\ f,\ g\,,\ h\,,$$

puramente *elastica*. Cercando per quest'ultima deformazione le condizioni di equilibrio riusciremo a determinare i valori degli spostamenti, e conseguentemente pressioni, dilatazione, ecc., per tutto lo spazio considerato.

3. Supponendo il corpo sottratto a tutte le forze esterne, che non siano quelle del calore, le condizioni di equilibrio sono, nello spazio,

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\,, \quad \text{ecc.,} \tag{1}$$

ed in superficie

$$L = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn}\,, \quad \text{ecc.,} \tag{2}$$

dove

$$X = Y = Z = L = M = N = 0\,, \tag{3}$$

purchè si abbia cura di diminuire a, b, c di $k\tau$. Considerando solo le prime equazioni di ciascuna terna, è noto che, nel caso dell'isotropia, soltanto $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ contiene a, b, c, e precisamente si ha

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -A\Theta + 2B(b + c)\,.$$

Dunque $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ si cambia in

$$-A(\Theta - 3k\tau) + 2B(b + c - 2k\tau) = \frac{\partial \Pi}{\partial a} + k(3A - 4B)\tau\,.$$

Sostituendo nelle (1) e nelle (2) si giunge agli stessi risultati che

si otterrebbero lasciando intatti i secondi membri di queste equazioni e prendendo, invece di (3),

$$\left\{\begin{aligned} X &= -k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial x}\,, \quad L = -k(3A-4B)\tau\frac{dx}{dn}\,,\\ Y &= -k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial y}\,, \quad M = -k(3A-4B)\tau\frac{dy}{dn}\,,\\ Z &= -k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial z}\,, \quad N = -k(3A-4B)\tau\frac{dz}{dn}\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Adunque l'elevazione di temperatura, definita dalla funzione τ, produce in un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, sottratto all'azione di qualunque altra forza esterna, effetti identici a quelli che si avrebbero applicando al corpo, supposto in equilibrio di temperatura, le forze (4). Si noti che la temperatura si comporta, nel corpo, come funzione potenziale delle forze di massa, ed in superficie come una pressione normale.

4. Ora possiamo subito scrivere le condizioni dell'equilibrio. Esse sono, per tutto lo spazio considerato,

$$\left\{\begin{aligned} k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial x} &= (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u\,,\\ k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial y} &= (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + B\Delta^2 v\,,\\ k(3A-4B)\frac{\partial\tau}{\partial z} &= (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + B\Delta^2 w\,, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ed in superficie

$$\left\{\begin{aligned} k(3A-4B)\tau\frac{dx}{dn} &= (A-2B)\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\frac{du}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\right),\\ k(3A-4B)\tau\frac{dy}{dn} &= (A-2B)\Theta\frac{dy}{dn} + 2B\frac{dv}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_1\frac{dz}{dn} - \mathfrak{T}_3\frac{dx}{dn}\right),\\ k(3A-4B)\tau\frac{dz}{dn} &= (A-2B)\Theta\frac{dz}{dn} + 2B\frac{dw}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_2\frac{dx}{dn} - \mathfrak{T}_1\frac{dy}{dn}\right). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Son queste le equazioni trovate da Duhamel, poi da F. Neumann (*).

(*) Betti, *loc. cit.*, p. 102.

5. Per quanto si è detto nel § 3, ogni questione concernente deformazioni dovute al calore equivale ad un problema di equilibrio elastico, nel quale le forze esterne hanno le espressioni (4). Possiamo dunque utilizzare tutti i risultati ottenuti precedentemente per dedurne altrettante conseguenze, relative a deformazioni termiche equivalenti. Prendiamo, per esempio, la formola

$$\int \Theta dS = \frac{1}{3A - 4B} \sum \left(\int XxdS + \int Lxds \right),$$

precedentemente dimostrata fra i più semplici corollarii del teorema di Betti. Qui si ha, adoperando le (4),

$$\int \Theta dS = -k \sum \left(\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS + \int \tau x \frac{dx}{dn} ds \right).$$

Del resto

$$\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS = \int \frac{\partial \tau x}{\partial x} dS - \int \tau dS = -\int \tau x \frac{dx}{dn} ds - \int \tau dS,$$

cioè

$$\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS + \int \tau x \frac{dx}{dn} ds = -\int \tau dS.$$

Dunque

$$\int \Theta dS = 3k \int \tau dS.$$

In altri termini: *la variazione del volume non dipende nè dalla forma del corpo, nè dai coefficienti di elasticità. Essa è uguale al totale aumento di temperatura, moltiplicato per tre volte il coefficiente di dilatazione lineare.*

6. Ora domandiamoci se è possibile che l'elevazione τ di temperatura non desti forze elastiche. Per questo è necessario e sufficiente che il potenziale Π delle dette forze sia nullo, cioè che si abbia

$$a = b = c = k\tau \;,\quad f = g = h = 0. \qquad (7)$$

Le note condizioni, necessarie e sufficienti perchè a, b, c, f, g, h

rappresentino le componenti di una deformazione possibile, si riducono, nel caso attuale, al simultaneo annullamento delle sei derivate seconde di τ. Dunque τ dev'essere funzione lineare delle coordinate: sia $\tau = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$. Allora, integrando la prima delle (7), si ottiene

$$u = k\frac{\alpha}{2}x^2 + kx(\tau - \alpha x) + \varphi(y, z)$$

ovvero

$$u = k\tau x - \frac{k}{2}\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + u_0,$$

con u_0 indipendente da x. Forme analoghe assumono v e w. Evidentemente

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

ed inoltre la sostituzione delle precedenti espressioni di u, v, w nelle rimanenti uguaglianze (7) dà

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0.$$

Dunque u_0, v_0, w_0 rappresentano (II, 1) spostamenti rigidi, dai quali si prescinde. Ne segue che, quando gli spostamenti non hanno la forma

$$\begin{cases} u = k\tau x - \dfrac{k\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \\ v = k\tau y - \dfrac{k\beta}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \\ w = k\tau z - \dfrac{k\gamma}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \end{cases}$$

cioè quando τ non dipende linearmente dalle coordinate, si può essere sicuri che una deformazione elastica reagisce contro la deformazione puramente termica, e l'equilibrio elastico si stabilisce in condizioni diverse da quelle che si avevano prima della comunicazione di calore.

7. Trattiamo il problema nel caso d'una *sfera piena*, supponendo che l'elevazione di temperatura in ciascun punto dipenda solo dalla distanza r del punto stesso al centro della sfera. Chiamato ϵ l'allungamento unitario secondo il raggio, si ha $u=\epsilon x$, $v=\epsilon y$, $w=\epsilon z$, e conseguentemente

$$\Delta^2 u = x\Delta^2\epsilon + 2\frac{\partial\epsilon}{\partial x} = x\left(\frac{2}{r}\frac{d\epsilon}{dr} + \frac{d^2\epsilon}{dr^2}\right) + 2\frac{x}{r}\frac{d\epsilon}{dr} = \frac{x}{r}\left(4\frac{d\epsilon}{dr} + r\frac{d^2\epsilon}{dr^2}\right).$$

D'altra parte si ha

$$\Theta = 3\epsilon + r\frac{d\epsilon}{dr}\ ,\quad \frac{d\Theta}{dr} = 4\frac{d\epsilon}{dr} + r\frac{d^2\epsilon}{dr^2}.$$

Dunque

$$\Delta^2 u = \frac{x}{r}\frac{d\Theta}{dr}\ ,\quad \Delta^2 v = \frac{y}{r}\frac{d\Theta}{dr}\ ,\quad \Delta^2 w = \frac{z}{r}\frac{d\Theta}{dr}.$$

Quindi le equazioni (5) si riducono tutte all'unica

$$k(3A-4B)\frac{d\tau}{dr} = A\frac{d\Theta}{dr}\ ,$$

che si può subito integrare scrivendo

$$\Theta = 3\lambda + \frac{k(3A-4B)}{A}\tau\ .$$

E poichè Θr^2 è manifestamente la derivata di ϵr^3, si ottiene, con una nuova integrazione,

$$\epsilon = \lambda + \frac{\mu}{r^3} + \frac{k(3A-4B)}{Ar^3}\int_0^r \tau r^2 dr\ . \tag{8}$$

Per determinare μ basta osservare che, fintantochè μ differisce da zero, lo spostamento ϵr diventa infinito nel centro della sfera, e ciò non deve accadere. Pertanto è necessario che sia $\mu=0$. Per determinare λ si ricorre alle (6), le quali si riducono all'equazione unica

$$\begin{aligned} k(3A-4B)\tau &= (A-2B)\Theta + 2B\left(\epsilon + r\frac{d\epsilon}{dr}\right) \\ &= (3A-4B)\epsilon + Ar\frac{d\epsilon}{dr}\ , \end{aligned}$$

che dev'essere soddisfatta quando r diventa uguale al raggio a della sfera. Intanto dalla (8) si deduce

$$\frac{d\epsilon}{dr} = \frac{k(3A-4B)}{Ar}\left(\tau - \frac{3}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\right).$$

Dunque per $r = a$ si deve avere

$$\epsilon = \frac{3k}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\,,$$

cioè

$$\lambda = \frac{3k}{a^3}\int_0^a \tau r^2 dr - \frac{k(3A-4B)}{Aa^3}\int_0^a \tau r^2 dr = \frac{4kB}{Aa^3}\int_0^a \tau r^2 dr\,,$$

e finalmente, per sostituzione in (8), si giunge alla formola di F. Neumann e Borchardt (*):

$$\epsilon = \frac{3k}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr + \frac{4kB}{A}\left(\frac{1}{a^3}\int_0^a \tau r^2 dr - \frac{1}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\right).$$

8. Supponiamo, per finire, che in un *suolo elastico*, omogeneo ed isotropo, si faccia variare pochissimo la temperatura, mettendone la superficie in contatto con una sorgente costante di calore, dimodochè sia $\Delta^2\tau = 0$ in tutto il corpo. Per cercare uno degli infiniti sistemi possibili di spostamenti poniamo

$$u' = -k(3A-4B)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad v' = -k(3A-4B)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$
$$w' = -k(3A-4B)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.$$

Le equazioni indefinite per l'equilibrio sono soddisfatte se

$$\tau + A\Delta^2\varphi = 0\,.$$

(*) Betti, *loc. cit.*, p. 108.

Possiamo dunque prendere

$$\varphi = -\frac{z\tau_1}{2A},$$

dopo aver posto

$$\tau = \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 \tau_3}{\partial z^3} = \dots .$$

Ne segue

$$u' = \frac{k(3A-4B)}{2A} z \frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad v' = \frac{k(3A-4B)}{2A} z \frac{\partial \tau_1}{\partial y},$$

$$w' = \frac{k(3A-4B)}{2A}(z\tau + \tau_1). \tag{9}$$

Questi spostamenti provocano in superficie le pressioni

$$L' = -\frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad M' = -\frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial y},$$

$$N' = -k(3A-4B)\tau .$$

Dunque gli spostamenti

$$u'' = u - u', \quad v'' = v - v', \quad w'' = w - w'$$

son dovuti all'azione delle seguenti forze, applicate alla sola superficie:

$$L'' = \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad M'' = \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \quad N'' = 0.$$

Evidentemente si ha

$$\int \frac{L'' ds}{r} = \frac{kB}{A}(3A-4B)\int \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial \xi \partial \zeta}\frac{ds}{r} = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_2}{\partial x},$$

e però

$$\mathfrak{L}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_3}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_3}{\partial y},$$

ed $\mathfrak{N}'' = 0$. Analogamente

$$\mathbf{\mathfrak{L}}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_4}{\partial x}, \quad \mathbf{\mathfrak{M}}'' = -2\pi \frac{kB}{A}\frac{\partial \tau_4}{\partial y}, \quad \mathbf{\mathfrak{N}}'' = 0 ;$$

quindi, adoperando sempre la segnatura del precedente capitolo,

$$\psi'' = 2\pi \frac{kB}{A}(3A - 4B)\tau_1 \ , \quad \chi'' = 2\pi \frac{kB}{A}(3A - 4B)\tau_2 \, .$$

Ora le formole (9) e (10) dello stesso capitolo dànno

$$u'' = -\frac{k}{2A}(3A - 4B)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A\tau_2}{A - B} + z\tau_1\right) \, ,$$

$$v'' = -\frac{k}{2A}(3A - 4B)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A\tau_2}{A - B} + z\tau_1\right) \, ,$$

$$w'' = \frac{k}{2A}(3A - 4B)\left(\frac{B\tau_1}{A - B} - z\tau\right) .$$

Dunque, tenendo conto delle (9), e ponendo, per brevità,

$$K = \frac{k(3A - 4B)}{4\pi(A - B)}$$

si perviene finalmente alle formole

$$u = K\frac{\partial}{\partial x}\int \tau \log(z + r)ds \ , \quad v = K\frac{\partial}{\partial y}\int \tau \log(z + r)ds \, ,$$

$$w = -K\int \frac{\tau ds}{r} .$$

Per i corpi che più si avvicinano alla legge di Navier e Poisson, la costante K è presso a poco la quinta parte di k.

XVI. IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT.

1. Lo studio delle deformazioni d'un corpo cilindrico, sotto l'azione di forze applicate soltanto alle basi, è particolarmente importante per la pratica. Siccome la teoria generale si urta in difficoltà di calcolo, attualmente insuperabili, si è pensato di semplificare la quistione, trattandola prima in un caso particolare. Il passaggio

al caso generale si giustifica (*) poi largamente mediante considerazioni teoriche e sperimentali. Ciascun elemento della base è base d'un cilindro infinitamente sottile, che fa parte del corpo dato e si chiama *fibra*. Il corpo cilindrico è dunque costituito da infinite fibre longitudinali, e noi vogliamo limitarci a studiare quelle deformazioni che non suscitano tensioni laterali tra le fibre contigue, dimodochè queste si deformano come se fossero indipendenti le une dalle altre. Supporremo inoltre che il corpo sia dotato d'isotropia incompleta, e l'asse d'isotropia sia parallelo (come effettivamente avviene nei corpi che si hanno a sperimentare nella pratica) alle generatrici del cilindro.

2. Assumiamo come piano delle xy una delle basi, e supponiamo che queste sieno sezioni rette del cilindro. Così l'asse delle z riesce parallelo alle generatrici. Per esprimere il potenziale elastico si ha la formula

$$-\Pi = \frac{1}{2}(A-2B)\Theta^2 + B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2)$$
$$+Cc^2+2A'(f^2+g^2)+2B'(h^2-ab),$$

nella quale A, B, C, A', B' sono quantità costanti. Per la nullità delle tensioni laterali occorre e basta che si abbia

$$p_{xx}=0\ ,\quad p_{yy}=0\ ,\quad p_{xy}=0 \tag{1}$$

in tutto il corpo, cioè

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a}=0\ ,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial b}=0\ ,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial h}=0\,.$$

Adunque debbono aver luogo le relazioni

$$(A-2B)\Theta+2Ba=2B'b\ ,\quad (A-2B)\Theta+2Bb=2B'a\ ,\quad h=0.$$

Dalle prime due si ricava

$$a=b=-\eta c \tag{2}$$

(*) Vedi il « *Traité* » di Clebsch, p. 175.

ponendo

$$\eta = \frac{A - 2B}{2(A - B - B')}.$$

Le condizioni $h = 0$ ed $a = b$ ci dicono che due elementi superficiali, paralleli alle generatrici e perpendicolari fra loro, sono ancora perpendicolari dopo la deformazione, e che ogni elemento perpendicolare alle generatrici subisce, intorno a ciascun punto, una dilatazione o una contrazione, la stessa in tutte le direzioni. La costante η, che misura il rapporto della contrazione trasversale all'allungamento longitudinale unitario, si chiama *coefficiente di contrazione trasversale.* Il suo valore è $\frac{1}{4}$ in quei corpi completamente isotropi per i quali si ha $A = 3B$.

3. In seguito ci occorrerà determinare le pressioni che si sviluppano sugli elementi delle sezioni trasversali del cilindro. È questa una ricerca importante, perchè le componenti p_{xz}, p_{yz}, p_{zz} di tali pressioni, cambiate di segno, servono evidentemente a far conoscere, ponendovi $z = 0$ e z uguale (*) alla lunghezza l del cilindro, le forze che bisogna applicare alle basi per produrre una data deformazione. Si ha subito

$$-p_{zz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial c} = (A - 2B)\Theta + 2(B + C)c = Ec,$$

ponendo

$$E = (A - 2B)(1 - 2\eta) + 2(B + C).$$

Dunque, per un dato allungamento unitario nella direzione delle generatrici del cilindro, si sviluppa nella direzione stessa una tensione proporzionale alla costante E, che per questa ragione si chiama *coefficiente di elasticità longitudinale.* Si chiama invece

(*) Ciò si può anche vedere scrivendo le equazioni ai limiti, relative alle basi, ed osservando che, sulla base libera $z = l$, si ha $\frac{dx}{dn} = 0$, $\frac{dy}{dn} = 0$, $\frac{dz}{dn} = 1$.

coefficiente di elasticità trasversale la costante $G = B + A'$, perchè si ha

$$-p_{xz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g} = 2Gg \ , \quad -p_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f} = 2Gf \, ,$$

vale a dire che per dati scorrimenti (verso l'asse d'isotropia) degli elementi lineari perpendicolari all'asse, le componenti tangenziali della tensione sono proporzionali a G. Si noti che nei soliti cristalli isotropi ($A = 3B$) si ha $G = \frac{2}{5}E$.

4. Si è visto che u e v soddisfano necessariamente alle condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \, .$$

Ne segue che $u + iv$ è funzione della variabile complessa $\zeta = x + iy$, vale a dire che nella funzione $u + iv$ delle variabili indipendenti x, y, z, le prime due variabili possono entrare soltanto nella combinazione ζ, dimodochè si ha

$$u + iv = \varphi(\zeta, z)$$

e la determinazione di u e v si potrà fare in una volta sola determinando la funzione φ. Intanto le equazioni indefinite dell'equilibrio diventano

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial g} = 0 \, , \quad \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0 \, , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0 \, . \quad (3)$$

La prima si può scrivere successivamente così:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \ , \quad \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\eta \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, .$$

Dunque alle prime due equazioni (3) si può dar la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \, .$$

Moltiplicando la seconda per i ed aggiungendola alla prima si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \eta\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) = \eta\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Il primo membro è coniugato di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u + iv) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}.$$

Dunque, rappresentando in generale con $\overline{\zeta}$ il numero conjugato di ζ, si vede che φ deve soddisfare all'equazione

$$\overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}} = \eta\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Ora si noti che il primo membro non dipende da ζ ma da $\overline{\zeta}$, mentre il secondo non può dipendere da $\overline{\zeta}$. Dunque l'uno e l'altro debbono ridursi ad una funzione della sola z. Ne segue che $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$ non contiene ζ, e per questo occorre che φ abbia la forma

$$\varphi = P\zeta^2 + 2Q\zeta + R,$$

essendo P, Q, R funzioni soltanto di z. Sostituendo in (4) si ottiene

$$2\overline{P} = \eta\left(\frac{d^2 P}{dz^2}\zeta^2 + 2\frac{d^2 Q}{dz^2}\zeta + \frac{d^2 R}{dz^2}\right);$$

quindi

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 Q}{dz^2} = 0, \quad \eta\frac{d^2 R}{dz^2} = 2\overline{P}.$$

Possiamo dunque porre, rappresentando convenientemente le costanti,

$$P = -\frac{\eta}{2}\left[(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z)\right],$$

$$Q = -\frac{\eta}{2}(\alpha + \beta z) - \frac{i}{2}(\alpha_0 + \beta_0 z).$$

Quanto alla funzione R, essa deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = -(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z),$$

e però si ha, integrando,

$$R = (\alpha' + i\alpha'') + (\beta' + i\beta'')z - (\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{z^2}{2} - (\beta_1 + i\beta_2)\frac{z^3}{6}.$$

Dunque, finalmente, si ottengono le espressioni di u e v prendendo rispettivamente la parte reale ed il coefficiente di i nell'espressione

$$-\eta\left[(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z)\right]\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + ixy\right)$$
$$-\left[\eta(\alpha + \beta z) + i(\alpha_0 + \beta_0 z)\right](x + iy) + R.$$

Si perviene in tal modo alle seguenti formole

$$u = -\eta\left(\alpha x + \alpha_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \alpha_2 xy\right) - \eta z\left(\beta x + \beta_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \beta_2 xy\right)$$
$$+ (\alpha' + \alpha_0 y) + (\beta' + \beta_0 y)z - \alpha_1 \frac{z^2}{2} - \beta_1 \frac{z^3}{6},$$

$$v = -\eta\left(\alpha y + \alpha_1 xy + \alpha_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right) - \eta z\left(\beta y + \beta_1 xy + \beta_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right)$$
$$+ (\alpha'' - \alpha_0 x) + (\beta'' - \beta_0 x)z - \alpha_2 \frac{z^2}{2} - \beta_2 \frac{z^3}{6}.$$

5. Ora bisogna determinare w. Integrando (2) si ottiene

$$w = F(x, y) + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y)z + (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y)\frac{z^2}{2}. \qquad (5)$$

Inoltre si deve ancora soddisfare alla terza equazione indefinita, cioè all'ultima delle (3), che prende la forma

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

rappresentando con k la costante $\frac{E}{2G}$, che nei corpi pienamente isotropi si riduce ad $1 + \eta$. Se si osserva che

$$2\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

l'ultima equazione diventa

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(k-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\,;$$

poi, ponendo per w l'espressione (5),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2(k-\eta)(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)=0\,. \tag{6}$$

A questa equazione si soddisfa, in particolare, prendendo F uguale a

$$\Phi=-(k-\eta)\left(\beta\frac{x^2+y^2}{2}+\beta_1 xy^2+\beta_2 x^2 y\right),$$

ed è chiaro che a Φ si può aggiungere qualunque funzione lineare di x, y. Dunque, se si pone

$$F=\Omega+\Phi+\gamma-\beta' x-\beta'' y\,,$$

si vede che Ω è una *funzione armonica delle variabili* x, y, alla quale possiamo anche, per la presenza della costante arbitraria γ nell'espressione di F, arbitrariamente assegnare il valore in un dato punto. Conosciuta Ω, si avrà $w=\Omega+\Phi+\Psi$, ponendo

$$\Psi=\gamma-\beta' x-\beta'' y+(\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y)z+(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)\frac{z^2}{2}.$$

Finalmente si conosceranno le pressioni sugli elementi delle sezioni trasversali, giacchè si è trovato, nel § 3, che

$$-p_{xz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad -p_{yz}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad -p_{zz}=E\frac{\partial w}{\partial z},$$

e per conseguenza, ponendo per u, v, w le precedenti espressioni,

$$-p_{xz}=G\left[-k\beta x+\beta_0 y-\eta\beta_1\frac{x^2}{2}-(2k-3\eta)\beta_1\frac{y^2}{2}-(2k-\eta)\beta_2 xy+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]$$

$$-p_{yz}=G\left[-k\beta y-\beta_0 x-\eta\beta_2\frac{y^2}{2}-(2k-3\eta)\beta_2\frac{x^2}{2}-(2k-\eta)\beta_1 xy+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right]$$

$$-p_{zz}=E\left[(\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y)+(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)z\right].$$

6. La quistione è dunque ridotta alla determinazione di Ω. Per ora sappiamo soltanto che questa funzione deve soddisfare all'equazione di Laplace in tutti i punti della sezione retta del cilindro; ma per poterla determinare bisogna ancora vedere a quali condizioni essa soddisfa sul contorno della sezione stessa. Per questo si considerino le equazioni ai limiti, relative alla superficie laterale del cilindro, e prima di tutto si osservi che, in virtù delle (1) e del fatto che $\frac{dz}{dn}$ ha il valore zero sulla detta superficie, le prime due equazioni sono soddisfatte identicamente, mentre la terza si riduce a

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dx}{dn}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{dy}{dn}=0\,,$$

e se ne ricava

$$\frac{dw}{dn}=-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dy}{dn}\right).$$

Dunque $\frac{dw}{dn}$ si può ritenere come conosciuta, e però è conosciuto in ogni punto del contorno il valore di

$$\frac{d\Omega}{dn}=\frac{dw}{dn}-\frac{d\Phi}{dn}-\frac{d\Psi}{dn}.$$

Ne segue che, a meno d'una costante additiva, arbitraria, la funzione Ω si può, per una data sezione retta, considerare come pienamente determinata, purchè non vi sia incompatibilità fra l'equazione indefinita $\Delta^2\Omega=0$ e l'insieme dei valori assegnati a $\frac{d\Omega}{dn}$ sul contorno. È noto che per questo occorre che sia

$$\int\frac{d\Omega}{dn}d\sigma=-\int\Delta^2\Omega ds=0\,,$$

estendendo la prima integrazione a tutto il contorno, e la seconda all'area in esso racchiusa. Ciò premesso, si osservi che

$$\int\frac{dw}{dn}d\sigma=-\int\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dy}{dn}\right)d\sigma=\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right)ds$$

$$=-2\eta\int\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}ds=-2\eta\int(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)\,ds\,.$$

Similmente, se si rammenta che Φ soddisfa alla (6),

$$\int \frac{d\Phi}{dn} d\sigma = -\int \Delta^2 \Phi ds = 2(k-\eta) \int (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y) ds.$$

Finalmente, osservando che Ψ è lineare in x e y,

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\sigma = -\int \Delta^2 \Psi ds = 0.$$

Dunque

$$\int \frac{d\Omega}{dn} d\sigma = -2k \int (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y) ds = -2ks(\beta + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0),$$

rappresentando con x_0 ed y_0 le coordinate del centro di gravità della sezione. Ne segue che fra le costanti β, β_1, β_2 si deve avere la relazione

$$\beta + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 = 0 \tag{7}$$

affinchè la funzione Ω possa esistere.

7. La soluzione precedentemente ottenuta racchiude le costanti

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta', \beta'', \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma$$

che si riducono, in virtù di (7), a *dodici* veramente arbitrarie. Sei di esse restano determinate se si impediscono i moti rigidi d'una particella. Se si suppone, per esempio, che il centro di gravità d'una base si mantenga fisso, e che, preso intorno ad esso un elemento superficiale, questo si deformi restando nel piano della base, in modo che un suo elemento lineare non varii in direzione, si vengono a porre tali condizioni, che non consentirebbero alcun movimento al corpo, se questo fosse rigido. Perchè siano soddisfatte, bisogna, prima di tutto, che per $x=0$, $y=0$, $z=0$ si abbia $u=0$, $v=0$, $w=0$, se l'origine si colloca nel punto fisso. Intanto si noti che questa scelta dell'origine riduce a $\beta=0$ la condizione (7). Se poi si dirige l'asse delle x secondo quell'elemento lineare, che abbiamo obbligato a non spostarsi lateralmente, lo spostamento v del punto $(dx, 0, 0)$

cioè $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 dx$, come gli spostamenti w di tutti i punti $(dx, dy, 0)$, cioè $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 dy$, debbono essere nulli, e però si deve avere

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0\,.$$

Finalmente, perchè la funzione Ω sia pienamente determinata, imponiamole il valore 0 nell'origine. Con ciò le nostre formule non subiscono alcuna particolarizzazione, come si è osservato nel § 5. Tutte queste condizioni esigono che si abbia

$$\alpha' = 0\,, \quad \alpha'' = 0\,, \quad \alpha_0 = 0\,, \quad \beta = 0\,, \gamma = 0\,, \quad \beta' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0\,, \quad \beta'' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0\,,$$

e così non restano più che le *sei* costanti arbitrarie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ nelle espressioni degli spostamenti, delle tensioni, ecc. Gli spostamenti sono

$$u = -\eta\left(\alpha x + \alpha_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \alpha_2 xy\right) - \eta z\left(\beta_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \beta_2 xy\right)$$
$$+ \beta_0 yz - \alpha_1 \frac{z^2}{2} - \beta_1 \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 z\,,$$

$$v = -\eta\left(\alpha y + \alpha_1 xy + \alpha_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right) - \eta z\left(\beta_1 xy + \beta_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right)$$
$$- \beta_0 xz - \alpha_2 \frac{z^2}{2} - \beta_2 \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 z\,,$$

$$w = -(k - \eta)(\beta_1 xy^2 + \beta_2 x^2 y) + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y) z$$
$$+ (\beta_1 x + \beta_2 y)\frac{z^2}{2} + \Omega - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 x - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 y\,.$$

8. La funzione Ω, che dipende dalla forma della sezione, si determina per ogni forma particolare mediante l'equazione indefinita $\Delta^2 \Omega = 0$ e le condizioni ai limiti, cioè $\Omega = 0$ per $x = 0$, $y = 0$, e

$$\frac{d\Omega}{dn} = U\frac{dx}{dn} + V\frac{dy}{dn}$$

sul contorno, essendo U e V due funzioni note di x ed y, delle quali è utile tenere presenti le espressioni, che per quanto si è visto nel § 6 sono

$$U = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right), \quad V = -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right).$$

Quindi, sostituendo ad u, v le precedenti espressioni, ed a Φ, Ψ quelle che si trovano segnate nel § 5, si ottiene

$$U = -\beta_0 y + \frac{\beta_1}{2}[\eta x^2 + (2k - 3\eta) y^2] + (2k - \eta)\beta_2 xy,$$

$$V = \beta_0 x + \frac{\beta_2}{2}[\eta y^2 + (2k - 3\eta) x^2] + (2k - \eta)\beta_1 xy.$$

9. Per avere a determinare funzioni che dipendano soltanto dalla forma della sezione, e non dai coefficienti β, si ponga

$$\Omega = \beta_0 \Omega_0 + \beta_1 \Omega_1 + \beta_2 \Omega_2.$$

Le funzioni $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ debbono essere armoniche, annullarsi nell'origine, e soddisfare sul contorno alle condizioni

$$\frac{d\Omega_0}{dn} = -y\frac{dx}{dn} + x\frac{dy}{dn},$$

$$\frac{d\Omega_1}{dn} = \frac{1}{2}[\eta x^2 + (2k - 3\eta) y^2]\frac{dx}{dn} + (2k - \eta) xy\frac{dy}{dn},$$

$$\frac{d\Omega_2}{dn} = (2k - \eta) xy\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}[\eta y^2 + (2k - 3\eta) xy]\frac{dy}{dn}.$$

Qui importa osservare che, se la sezione è simmetrica rispetto all'asse delle x, Ω_1 è una funzione *pari* di y. Infatti la relativa equazione ai limiti e l'equazione indefinita non si alterano quando si cambia y in $-y$, giacchè in due punti del contorno, simmetrici rispetto all'asse delle x, i valori di $\frac{dy}{dn}$ differiscono evidentemente solo nel segno. Siccome la funzione che soddisfa alle dette condizioni è unica, essa è la stessa Ω_1. Questa funzione è invece *dispari* nella x, se la sezione è simmetrica rispetto all'asse delle y, perchè

il cambiamento di x in $-x$ fa soltanto cambiare il segno di $\frac{d\Omega_1}{dn}$, ed alle nuove condizioni soddisfa certamente la funzione $-\Omega_1$. Adunque si ha

$$\Omega_1(x, -y) = \Omega_1(x, y) \quad , \quad \Omega_1(-x, y) = -\Omega_1(x, y) .$$

Analogamente si dimostra che, nelle ipotesi accennate, Ω_2 è dispari nella y, pari nella x:

$$\Omega_2(x, -y) = -\Omega_2(x, y) \quad , \quad \Omega_2(-x, y) = \Omega_2(x, y) .$$

Ne segue che $\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}$ sono funzioni dispari di y e di x rispettivamente; quindi

$$\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}\right)_0 = 0 .$$

Finalmente, se la sezione è simmetrica rispetto ai due assi, Ω_0 è dispari tanto in x quanto in y, e si ha, per conseguenza,

$$\left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial x}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial y}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x^2}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial y^2}\right)_0 = 0 \; ,$$

mentre la derivata seconda mista è pari tanto in y quanto in x, e perciò non si annulla necessariamente nel centro della sezione, come non è necessario che si annullino $\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}$.

XVII. APPLICAZIONE AI PROBLEMI DELLA PRATICA.

1. Dal problema particolare fin qui trattato si passa ai problemi della pratica appoggiandosi all'ipotesi che due sistemi di forze, staticamente equivalenti, non producono deformazioni diverse. In realtà ciò non è vero, perchè il modo con cui le forze deformatrici

vengono distribuite alla superficie del corpo influisce pure sulla deformazione; ma l'osservazione ha dimostrato che le differenze dovute a tale causa non si rendono sensibili che nelle vicinanze dei punti di applicazione, quando questi occupano una piccola parte della superficie. Pertanto si può ritenere che, fatta eccezione di due regioni vicinissime alle basi, un corpo cilindrico, la cui lunghezza predomini rispetto alle dimensioni delle sezioni trasversali, si comporti effettivamente come un insieme di fibre indipendenti le une dalle altre. Ciò premesso, supponiamo che le forze applicate alla base libera si compongano nella forza (X, Y, Z) e nella coppia $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, e cerchiamo di vedere se tra le forze atte a produrre le deformazioni fin qui studiate se ne trovino che si compongono nella medesima forza e nella medesima coppia. Per questo noi cercheremo di esprimere $X, Y, Z, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mediante le costanti α, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2; poi, supponendo date le prime sei quantità, le formule che otterremo serviranno inversamente a determinare le suddette costanti, e conseguentemente a caratterizzare una deformazione, che in quasi tutto il cilindro presenta differenze trascurabili con quella che si produce effettivamente.

2. Calcoliamo dunque gli integrali

$$X = \int L ds \quad , \quad \mathfrak{L} = \int [Ny - M(z-l)] ds = \int Nyds \; ,$$

$$Y = \int M ds \quad , \quad \mathfrak{M} = \int [L(z-l) - Nx] ds = -\int Nxds \; ,$$

$$Z = \int N ds \quad , \quad \mathfrak{N} = \int (Mx - Ly) ds \; ,$$

estesi a tutta la base libera. Su questa si ha

$$L = -p_{xz} \quad , \quad M = -p_{yz} \quad , \quad N = -p_{zz} \; ,$$

e conseguentemente

$$X = G\left[-\frac{\beta_1 \eta}{2}\int x^2 ds - \frac{\beta_1}{2}(2k-3\eta)\int y^2 ds - (2k-\eta)\beta_2\int xyds + \int \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds\right]$$

$$Y = G\left[-\frac{\beta_2 \eta}{2}\int y^2 ds - \frac{\beta_2}{2}(2k-3\eta)\int x^2 ds - (2k-\eta)\beta_1\int xyds + \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} ds\right].$$

Per semplificare i calcoli riferiamo la figura ai suoi assi principali d'inerzia, e rappresentiamo con λ e μ i raggi d'inerzia, dimodochè

$$\int x^2 ds = \lambda^2 s \quad , \quad \int y^2 ds = \mu^2 s \quad , \quad \int xy ds = 0 .$$

Le espressioni precedenti diventano

$$X = -\frac{Gs}{2}\beta_1 [\eta\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2] + G\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds ,$$

$$Y = -\frac{Gs}{2}\beta_2 [\eta\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2] + G\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} ds .$$

Per la componente longitudinale della risultante si trova subito $Z = Es\alpha$. Bisogna ancora calcolare i due integrali che compariscono in X ed Y, ed è notevole che i loro valori si possono ottenere senza conoscere Ω. Prima si ha, pel teorema di Green,

$$\int \left(x\frac{d\Omega}{dn} - \Omega\frac{dx}{dn}\right) d\sigma = 0 ;$$

quindi

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds = -\int \Omega \frac{dx}{dn} d\sigma = -\int x \frac{d\Omega}{dn} d\sigma ,$$

ovvero

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds = -\int \left(U\frac{dx}{dn} + V\frac{dy}{dn}\right) x d\sigma = \int \left(\frac{\partial Ux}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial y}\right) ds ,$$

e finalmente

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds = \int U ds + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) x ds ,$$

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} ds = \int V ds + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) y ds .$$

D'altra parte, adoperando le espressioni trovate nel precedente § 8, si ha subito

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 2k(\beta_1 x + \beta_2 y) ,$$

e conseguentemente

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) x ds = 2k\beta_1\lambda^2 s \quad , \quad \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) y ds = 2k\beta_2\mu^2 s .$$

Inoltre

$$\int U ds = \frac{\beta_1 s}{2}[\eta\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2] ,$$

$$\int V ds = \frac{\beta_2 s}{2}[\eta\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2] .$$

Dunque

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds = \frac{\beta_1 s}{2}[(4k + \eta)\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2] ,$$

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial y} ds = \frac{\beta_2 s}{2}[(4k + \eta)\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2] ,$$

e finalmente

$$X = E\lambda^2 s\beta_1 \quad , \quad Y = E\mu^2 s\beta_2 .$$

Così già sappiamo che, data la risultante, sono determinate le costanti

$$\beta_1 = \frac{X}{E\lambda^2 s} \quad , \quad \beta_2 = \frac{Y}{E\mu^2 s} \quad , \quad \alpha = \frac{Z}{Es} .$$

Per determinare le altre osserviamo che

$$\int Nx ds = E\lambda^2 s(\alpha_1 + \beta_1 z) \quad , \quad \int Ny ds = E\mu^2 s(\alpha_2 + \beta_2 z) .$$

Invece, posto $\lambda^2 + \mu^2 = \rho^2$, si ottiene

$$\int (Mx - Ly) ds = - G\rho^2 s\beta_0 + G\int \left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) ds$$
$$+ \frac{G\beta_1}{2}\int [(2k - 3\eta)y^2 - (4k - 3\eta)x^2]\, y ds$$
$$- \frac{G\beta_2}{2}\int [(2k - 3\eta)x^2 - (4k - 3\eta)y^2]\, x ds .$$

Se la figura è simmetrica rispetto agli assi, come ordinariamente avviene, sono evidentemente nulli gli integrali che moltiplicano β_1 e β_2, e l'ultima formula si semplifica. Le osservazioni fatte alla fine del capitolo precedente sulla parità o disparità delle funzioni Ω ci permettono inoltre di asserire che gli integrali

$$\int \left(x\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\right) ds \quad , \quad \int \left(x\frac{\partial\Omega_2}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}\right) ds$$

sono nulli, perchè i loro elementi si possono aggruppare per coppie di valori uguali e con segni opposti. Ne segue

$$\int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) ds = \beta_0 \int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right) ds .$$

Adunque le formule che servono a determinare α_1, α_2, β_0 sono:

$$\alpha_1 + \beta_1 l = - \frac{\mathcal{M}}{E \lambda^2 s} \quad , \quad \alpha_2 + \beta_2 l = \frac{\mathcal{L}}{E \mu^2 s} \quad ,$$

$$\beta_0 = \frac{- \mathcal{N}}{G \left[\rho^2 s - \int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right) ds \right]} .$$

3. Le formole stabilite nel precedente paragrafo ci mettono in grado di analizzare una deformazione qualunque, mostrando come questa si possa sempre far risultare da quattro deformazioni speciali:

a) **Trazione**. Delle sei costanti arbitrarie si supponga la sola α diversa da zero. Sempre che le β sono nulle si ha $\Omega = 0$. Quindi le formole finali del § 7 (*cap.* XVI) diventano

$$u = - \eta \alpha x \quad , \quad v = - \eta \alpha y \quad , \quad w = \alpha z \quad ,$$

e caratterizzano una *trazione*, per la quale il cilindro si contrae trasversalmente e si allunga di

$$w = \alpha l = \frac{Zl}{Es} .$$

Si avrebbe invece una compressione nel caso che α fosse negativo. In queste deformazioni le sezioni trasversali si mantengono piane e le fibre restano rettilinee. Esse sono prodotte dalla sola forza Z, giacchè le formole del precedente paragrafo mostrano che X, Y, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sono nulle.

b) **Torsione**. Se annulliamo tutte le costanti, tranne β_0, la funzione Ω si riduce a $\beta_0 \Omega_0$, e le solite formole dànno

$$u = \beta_0 z \left[y + \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right)_0 \right] \quad , \quad v = - \beta_0 z \left[x - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \right)_0 \right] \quad ,$$

$$w = \beta_0 \left[\Omega_0 - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right)_0 x - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \right)_0 y \right] .$$

Prescindendo da w si studii il movimento in projezione sopra una sezione trasversale, e si trasporti l'origine in quel punto O' della sezione stessa, che ha le coordinate $\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y}\right)_0$, $-\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right)_0$, e che coincide col centro quando la sezione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, nel qual caso si ha pure $w = \beta_0 \Omega_0$. Allora si vede subito che lo spostamento (u, v) consiste in una piccolissima rotazione $-\beta_0 z$ intorno ad O', nel senso opposto a quello in cui si muove l'indice d'un orologio. Siccome i punti O' stanno sopra una fibra, si può dire che intorno a questa ruotano tutte le sezioni, e ruotano di angoli che da un estremo all'altro del cilindro variano da 0 fino a $-\beta_0 l$. Si ha dunque una *torsione*, prodotta unicamente dalla coppia $\mathfrak{N}$, che agisce nel piano della sezione estrema, e fa ruotar questa d'un angolo

$$\omega = -\beta_0 l = \frac{\mathfrak{N} l}{G\left[\rho^2 s - \int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right) ds\right]} .$$

Le sezioni trasversali non restano piane. Infatti nelle vicinanze della fibra centrale si ha

$$w = \frac{\beta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right] ,$$

e siccome i coefficienti dei termini estremi differiscono solo nel segno, si vede che la sezione si curva in forma di paraboloide iperbolico. Anzi, per quello che si è detto alla fine del precedente capitolo, se la sezione è simmetrica rispetto agli assi, si ha

$$w = \beta_0 \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x \partial y}\right)_0 xy ,$$

e però gli assi stessi dividono la sezione in quattro regioni tali, che due regioni opposte si abbassano mentre le altre due si sollevano sul piano primitivo. Tuttavia, se Ω_0 fosse nulla, la sezione si deformerebbe restando nel proprio piano. In questo caso il precedente valore dell'angolo di torsione si riduce a

$$\omega = \frac{\mathfrak{N} l}{G \rho^2 s} ,$$

e si ottiene così la formola che adoperano i « pratici », e che essi stabiliscono appunto facendo gratuitamente l'ipotesi che le sezioni restano piane.

c) **Flessione semplice**. Se conserviamo la sola costante α_1, è ancora $\Omega = 0$, e si ha

$$u = -\frac{\alpha_1}{2}[\eta(x^2 - y^2) + z^2] \quad , \quad v = -\eta\alpha_1 xy \quad , \quad w = \alpha_1 xz .$$

Per vedere come si deforma una fibra si mantengano costanti x ed y. Allora v è costante, e l'eliminazione di z fra u e w mostra che tutte le fibre si curvano parabolicamente in piani paralleli ad Oxz *(piano di flessione)*. In particolare, per la fibra centrale si ha $u = -\frac{\alpha_1}{2}z^2$, $v=0$, $w=0$. Questa fibra si piega dunque a parabola nel piano stesso di flessione, ed il massimo allontanamento *(saetta)* dall'antica posizione è

$$u = -\frac{\alpha_1}{2}l^2 = \frac{\mathcal{M}l^2}{2E\lambda^2 s} .$$

Questa deformazione è prodotta, come si vede, da una sola coppia che agisce nel piano di flessione. Si noti che le sezioni trasversali restano piane. Conservando α_2 invece di α_1 avremmo sempre una flessione, ma paralella al piano Oyz.

d) **Flessione complessa**. Più complicate sono le deformazioni caratterizzate dalle costanti β_1 e β_2 e provocate, per conseguenza, da una forza tangenziale X o Y. Consideriamo quella che corrisponde a β_1, ed affinchè alla forza X non si accompagni la coppia $\mathfrak{M}$ poniamo $\alpha_1 + \beta_1 l = 0$ invece di $\alpha_1 = 0$. Riprendiamo dunque le formole del § 7 del precedente capitolo, supponendovi diverse da zero le sole costanti β_1 e $\alpha_1 = -\beta_1 l$. Esse diventano, nel caso d'una sezione simmetrica,

$$u = \beta_1 \left[\eta \frac{x^2 - y^2}{2}(l - z) + \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}\right)_0 z\right] ,$$

$$v = \beta_1 \eta xy (l - z) ,$$

$$w = \beta_1 \left[- lxz + \frac{xz^2}{2} - (k - \eta) xy^2 + \Omega_1 - \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}\right)_0 x\right] .$$

È notevole che l'ipotesi $z=l$ renda u e v indipendenti da x e da y. Dunque, se si prescinde dagli spostamenti longitudinali, si può dire che la base libera si sposta lateralmente come se fosse rigida. Qui le sezioni trasversali, non solo non si conservano piane, ma assumono forme diverse (superficie del 3° ordine) secondo la loro posizione nel cilindro. Infatti w non è più, come nel caso della torsione, funzione delle sole variabili x ed y. Inoltre le fibre diventano lievemente gobbe, tranne quelle che sono situate nel piano Oxz (piano di flessione). In particolare, per $x=0$, $y=0$, si ha $v=0$, $w=0$. Dunque la fibra centrale si flette, nel detto piano, in forma di parabola cubica, giacchè si ha pure

$$u=\beta_1\left[\frac{lz^2}{2}-\frac{z^3}{6}+\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\right)_0 z\right].$$

Per $z=l$ si ottiene il valore della saetta di flessione, e si ritrova la formola dei pratici trascurando l'ultimo termine, il solo che dipenda dalla forma della sezione, e che assume valori il cui rapporto ad l^3 è trascurabile come l'area della sezione stessa rispetto ad l^2. Il valore approssimato della saetta è dunque

$$u=\frac{\beta_1}{3}l^3=\frac{Xl^3}{3E\lambda^2 s}.$$

4. Applichiamo i risultati precedenti al cilindro circolare. Prima di tutto dobbiamo determinare la funzione Ω. La prima delle condizioni ai limiti, scritte nel § 9 (*cap.* XVI), diventa

$$x\frac{\partial\Omega_0}{\partial x}+y\frac{\partial\Omega_0}{\partial y}=0.$$

Questa deve aver luogo per $x^2+y^2=R^2$; ma ad essa ed all'equazione di Laplace si può soddisfare per ogni coppia di valori di x ed y prendendo Ω_0 costante, e siccome si deve avere $\Omega_0=0$ in un punto, dovrà essere $\Omega_0=0$ in tutta la sezione. Dunque, riferendoci a quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, possiamo affermare che, nella torsione dei cilindri a sezioni trasversali circolari, queste sezioni restano piane. È stato appunto questo caso particolare che

ha indotto gli sperimentatori ad assumere ipoteticamente come vero l'ultimo fatto per tutte le forme, mentre già per la forma ellittica esso cessa di aver luogo. Infatti per un'ellisse dai semi-assi a e b si ottiene

$$\Omega_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy ;$$

poi $w = \beta_0 \Omega_0$: tutte le sezioni si cambiano in pezzi uguali d'un paraboloide iperbolico. Torniamo alle sezioni circolari, e determiniamo Ω_1. Questa funzione deve, per $x^2 + y^2 = R^2$, soddisfare alla condizione

$$x \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \eta x^3 + \left(3k - \frac{5}{2} \eta\right) xy^2 .$$

È naturale che si tenti di verificarla ponendo per Ω_1 una funzione del terzo grado in x ed y. Intanto si è visto (XVI, 9) che Ω_1 è *pari* nella y e *dispari* nella x, e però bisogna porre

$$\Omega_1 = \alpha x + \beta x^3 + \gamma y^2 + \delta x y^2 .$$

Perchè sia soddisfatta l'equazione di Laplace è necessario che si abbia identicamente $6\beta x + 2(\gamma + \delta x) = 0$, cioè $\gamma = 0$, $\delta = -3\beta$. Per conseguenza

$$\Omega_1 = \alpha x + \beta (x^3 - 3xy^2) .$$

Ora la condizione ai limiti diventa

$$\alpha x + 3\beta (x^3 - 3xy^2) = \frac{1}{2} \eta x^3 + \left(3k - \frac{5}{2} \eta\right) xy^2 ,$$

e ad essa si può, sul contorno, soddisfare identicamente se, dopo avere moltiplicato per $x^2 + y^2$ il termine αx, e gli altri termini per R^2, si prende

$$\alpha + 3\beta R^2 = \frac{\eta}{2} R^2 , \quad \alpha - 9\beta R^2 = \left(3k - \frac{5}{2} \eta\right) R^2 ,$$

vale a dire

$$\alpha = \frac{1}{4} (3k - \eta) R^2 , \quad \beta = -\frac{1}{4} (k - \eta) ,$$

e finalmente

$$\Omega_1 = \frac{1}{4}\left[(3k-\eta)R^2 x - (k-\eta)(x^3 - 3xy^2)\right].$$

Di qui deduciamo

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}\right)_0 = (3k-\eta)\frac{R^2}{4}\quad,\quad \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y}\right)_0 = 0\,.$$

D'altra parte

$$\int x^2 ds = \int y^2 ds = \frac{1}{2}\int r^2 ds = \pi\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4}R^4 = \frac{1}{4}R^2 s\,,$$

e, per conseguenza, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}R$, $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Segue da tutto ciò che l'angolo di torsione, la saetta della flessione semplice, quella della flessione complessa, ecc., hanno i valori

$$\frac{2\mathfrak{M}l}{\pi G R^4}\,,\quad \frac{2\mathfrak{M}l^2}{\pi E R^4}\,,\quad \frac{4Xl^3}{3\pi E R^4}\,,\quad \text{ecc.}$$

L'ultima saetta è, più esattamente,

$$\frac{4Xl^3}{3\pi E R^4}\left[1 + \frac{3}{4}(3k-\eta)\left(\frac{R}{l}\right)^2\right].$$

Nel caso della sezione ellittica i raggi λ e μ hanno i valori $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$. La formola adoperata in pratica per esprimere l'angolo di torsione è

$$\omega = \frac{4\mathfrak{M}l}{\pi G ab(a^2+b^2)}\,.$$

Essa induce in gravi errori quando la sezione è fortemente eccentrica. Per correggerla bisogna prima di tutto calcolare l'integrale

$$\int\left(x\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right)ds = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int(x^2-y^2)\,ds = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(\lambda^2-\mu^2)\,s\,.$$

Il denominatore della formola esatta si cambia allora nel prodotto di Gs per

$$\lambda^2+\mu^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2+b}(\lambda^2-\mu^2) = \frac{2}{a^2+b^2}(b^2\lambda^2 + a^2\mu^2) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,.$$

Dunque il vero angolo di torsione è

$$\omega = \frac{(a^2 + b^2)\mathfrak{M}l}{\pi G a^3 b^3}.$$

Sempre superiore a quello degli empirici, questo valore è sufficientemente confermato da tutte le esperienze (*). L'accusa fatta alla teoria matematica della elasticità di non trovarsi in accordo coll'esperienza va dunque rivolta alle varie pretese teorie escogitate per giustificare *a posteriori* e generalizzare oltre misura alcune formolette empiriche, mettendo insieme ipotesi contradditorie, ingiustificate ed ingiustificabili. Le differenze che si trovano « *si prende l'abitudine di attribuirle* » dice Clebsch (**) « *ad imperfezioni della teoria piuttosto che ad irregolarità commesse nell'applicarla. Sarebbe forse perchè questa confusione si produce troppo spesso che **la teoria** è tanto discreditata in certi ambienti?* »

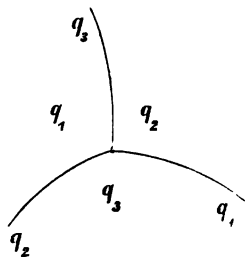
(*) Vedi una nota al « *Traité* » di CLEBSCH, pag. 209, ed altre note di SAINT-VENANT a pag. 210 e seguenti.
(**) Leggi l'interessante § 38 del « *Traité* ».

PARTE TERZA

XVIII. ALCUNE NOZIONI SULLE COORDINATE CURVILINEE.

1. Siano x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane d'un punto. L'equazione $f(x_1, x_2, x_3) = q$ rappresenta, per ciascun valore di q, una superficie. Se si considera q come un *parametro* suscettibile di tutti i valori reali, l'equazione stessa rappresenta una semplice infinità di superficie. Si considerino ora tre famiglie di superficie

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = q_1 \ , \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = q_2 \ , \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = q_3 \ ,$$

tali che tre superficie, prese comunque nelle tre famiglie, abbiano generalmente un sol punto comune. Questo punto sarà così individuato dai valori speciali che hanno i parametri q_1, q_2, q_3 sulle tre superficie che lo contengono. Perciò q_1, q_2, q_3 si possono assumere come *coordinate* del punto. Le tre superficie e le loro linee d'intersezione si dicono superficie e linee coordinate del punto, e prendono nome dai corrispondenti parametri. Così *la linea* q_i è quella linea coordinata, lungo la quale varia il solo parametro q_i, mentre *la superficie* q_i è quella superficie coordinata su cui resta costante il parametro q_i. Questo sistema di coordinate dicesi *ortogonale* se le superficie coordinate sono, in ogni punto, perpendicolari fra loro. Se ciò ha luogo, è chiaro che anche le linee coordinate riusciranno fra loro perpendicolari.

2. Le derivate di x_1, x_2, x_3 rispetto a q_i sono evidentemente proporzionali ai *coseni direttori della tangente alla linea* q_i, nel punto considerato, poichè muovendosi questo sulla detta linea, q_i varia come una funzione *del solo arco* percorso. I coseni stessi sono dunque

$$\frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\,, \tag{1}$$

se si pone

$$Q_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2. \tag{2}$$

Se poi con σ_i si rappresenta l'arco contato, sulla linea q_i, a partire da un'origine arbitrariamente fissata, e se si osserva che i coseni (1) sono anche uguali alle derivate di x_1, x_2, x_3 rispetto a σ_i, si vede subito che $d\sigma_i = Q_i dq_i$. In altri termini Q_i è il coefficiente che bisogna dare a dq_i per ottenere l'elemento lineare, lungo la linea q_i. Questa osservazione serve appunto, nei varii casi particolari, a far conoscere speditamente le funzioni Q_1, Q_2, Q_3, che hanno grande importanza in questa teoria. Quanto all'espressione generale dell'elemento lineare, essa è manifestamente data, nei sistemi ortogonali, dalla formola

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2\,,$$

poichè, a meno di infinitesimi superiori, $d\sigma$ misura la diagonale d'un parallelepipedo rettangolo, i cui lati sono misurati da $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$.

3. Le derivate parziali prime di q_i sono proporzionali ai *coseni direttori della normale alla superficie* q_i. Questi coseni sono dunque uguali alle derivate stesse, divise per $\pm\sqrt{\Delta q_i}$. Siccome poi la normale alla superficie q_i non è che la tangente alla linea q_i, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_2} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_3} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\,,$$

fissando convenientemente il verso positivo delle varie direzioni.

Queste formole, moltiplicate per $\frac{\partial q_i}{\partial x_1}, \frac{\partial q_i}{\partial x_2}, \frac{\partial q_i}{\partial x_3}$, rispettivamente, e sommate, dànno

$$\sqrt{\Delta q_i} = \frac{1}{Q_i}. \tag{3}$$

Dunque

$$Q_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \tag{4}$$

4. Ricordiamo che il determinante dei coseni degli angoli che le rette d'una terna ortogonale fanno con quelle di un'altra terna ortogonale, è uguale a ± 1, e si può sempre fare in modo che sia uguale a $+1$, nel qual caso avviene pure che ogni elemento del determinante è uguale al proprio complemento algebrico. Siccome il determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

si deduce dal determinante dei coseni dividendo le verticali rispettivamente per Q_1, Q_2, Q_3, si vede immediatamente che $\nabla = Q_1 Q_2 Q_3$. Inoltre gli elementi di ciascuna verticale di ∇ sono proporzionali ai proprii complementi algebrici. D'altra parte si ponga per un istante

$$s_k = \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j},$$

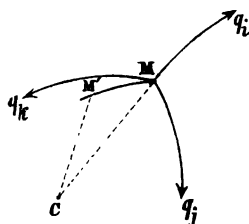
rappresentando con i, j, k una disposizione qualunque degli indici $1, 2, 3$. La condizione di ortogonalità fra le linee q_i e q_j, vale a dire

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0,$$

derivata rispetto a q_k, dà $s_i + s_j = 0$. Ne segue $s_1 = s_2 = s_3 = 0$,

ed all'eguaglianza $s_k = 0$ si può, in virtù delle proprietà precedentemente richiamate, dar la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

5. Ciò premesso, cerchiamo le linee di curvatura della superficie q_i. Spostiamo il punto M su questa superficie, in modo che dalla posizione $M(q_1, q_2, q_3)$ venga nella posizione

$$M'(q + \delta q_1 , q_2 + \delta q_2 , q_3 + \delta q_3) ,$$

essendo $\delta q_i = 0$. Perchè MM' stia sopra una linea di curvatura è necessario che avvenga l'incontro delle normali, in M ed M', alla superficie q_i. Siano $x_1 - \lambda \frac{\partial x_1}{\partial q_i}$, $x_2 - \lambda \frac{\partial x_2}{\partial q_i}$, $x_3 - \lambda \frac{\partial x_3}{\partial q_i}$ le coordinate cartesiane d'un punto della prima normale. Perchè questo appartenga alla seconda normale bisogna che siano nulle le variazioni delle coordinate nel passaggio da M ad M', bisogna cioè che si abbia

$$\left\{ \begin{aligned} &\delta x_1 - \lambda \delta \frac{\partial x_1}{\partial q_i} - \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \delta\lambda = 0 , \\ &\delta x_2 - \lambda \delta \frac{\partial x_2}{\partial q_i} - \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \delta\lambda = 0 , \\ &\delta x_3 - \lambda \delta \frac{\partial x_3}{\partial q_i} - \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \delta\lambda = 0 . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

L'eliminazione di λ e $\delta\lambda$ conduce subito alla condizione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \delta x_1 & \delta \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \delta x_2 & \delta \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \delta x_3 & \delta \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \end{vmatrix} = 0 ,$$

equivalente a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \end{vmatrix} = 0,$$

Scomponendo le colonne si ottiene, nel primo membro, una forma quadratica di δq_j e δq_k, in cui i coefficienti di δq_j^2 e δq_k^2 sono

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q} & \frac{\partial x_1}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_k} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_k} \end{vmatrix},$$

sono cioè uguali a zero, in virtù di (5). Resta il termine in $\delta q_j \delta q_k$, il cui coefficiente non può essere *identicamente* nullo, altrimenti tutte le linee uscenti da M sarebbero *sempre* linee di curvatura. Dunque $\delta q_j = 0$ o $\delta q_k = 0$. Si ha così il teorema di Dupin: *in ogni sistema triplo ortogonale, le superficie di due famiglie tracciano, sopra una superficie qualunque della terza famiglia, tutte le sue linee di curvatura* (*).

6. Adunque per trovare i raggi principali di curvatura della superficie q_i, nel punto M, bisogna far spostare questo punto sulle linee coordinate q_j e q_k. Se r_{ij} ed r_{ik} sono i raggi che si ottengono in queste due direzioni, i loro valori sono evidentemente dati dall'espressione $Q_i\lambda$, in cui λ si calcola mediante le equazioni (6). Suppongasi, per esempio, che si voglia calcolare r_{ij}. In questo caso,

(*) Vedi LAMÉ: *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, §§ XXIII, XXIV; o BIANCHI: *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, Nistri, 1885-86, § 122). Al prof. Beltrami si deve un'altra interessante dimostrazione, fondata su considerazioni cinematiche (*Rendiconti dell'Istituto lombardo*, 1872, p. 483).

essendo $\delta q_i = 0$, $\delta q_k = 0$, si ha $\delta = \frac{\partial}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$, e però le equazioni (6) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0, \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \right.$$

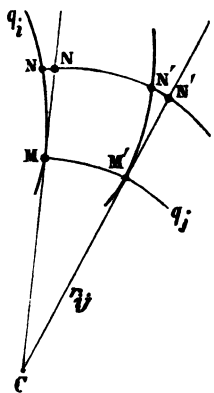
Moltiplicandole per $\frac{\partial x_1}{\partial q_j}$, $\frac{\partial x_2}{\partial q_j}$, $\frac{\partial x_3}{\partial q_j}$, rispettivamente, poi sommando e tenendo conto dell'ortogonalità delle linee q_i e q_j, si ottiene

$$Q_j^2 = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j^2 = \lambda Q_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

Dunque

$$\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{Q_i Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}. \tag{7}$$

7. Geometricamente la formola (7) si dimostra in modo assai semplice prendendo sulla linea q_j un arco infinitesimo MM', e considerando l'arco NN' nel quale si cambia MM' quando q_i diventa $q_i + dq_i$. Allora si ha

$$MN = d\sigma_i \quad , \quad MM' = d\sigma_j \quad , \quad NN' = d\sigma_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} dq_i dq_j \; ,$$

e la relazione evidente

$$\frac{NN' - MM'}{MM'} = \frac{MN}{r_{ij}}$$

si trasforma subito nella formola (7). Questa serve principalmente a far conoscere la segnatura adoperata da Lamé nelle sue classiche « *Leçons* ». Costantemente preoccupato di dar forma geometrica ai risultati dei suoi calcoli, l'illustre inventore delle coordinate curvilinee introduce sempre, nelle formole finali, le curvature degli archi coordinati e le derivate rispetto a questi archi. Ciò contribuisce a mettere in evidenza il vero significato delle formole stesse « imperocchè » — dice Laplace — « è interessante figurarsi nello spazio i risultati dell'Analisi, e reciprocamente leggere le modificazioni delle linee e delle superficie, e le variazioni del

movimento dei corpi, nelle equazioni che le esprimono. Questo riavvicinamento della Geometria e dell'Analisi sparge una luce nuova sulle due scienze: le operazioni intellettuali della seconda, rese sensibili mercè le immagini della prima, sono più facili a comprendere, più interessanti a seguire; e quando l'osservazione realizza queste immagini, e trasforma i risultati geometrici in leggi naturali, la vista di questo sublime spettacolo ci fa gustare il più nobile fra i piaceri riservati all'umana natura ».

XIX. DIGRESSIONE SUI PARAMETRI DIFFERENZIALI.

1. Data una funzione V delle coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3, le funzioni

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 \quad , \quad \Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \, ,$$

che si chiamano i *parametri differenziali* (*) di V, del primo e del secondo ordine, hanno la proprietà di non dipendere dal sistema di assi, rispetto al quale vengono calcolate. Infatti è facile dimostrare che, se si fa ruotare la terna ortogonale di assi arbitrariamente, i valori dei parametri differenziali, in ciascun punto, restano invariati (**). Ciò si deve ai significati geometrici e meccanici dei para-

---

(*) Considerati la prima volta da LAMÉ. Vedi le « *Leçons sur les coordonnées curvilignes* », § III. Chi voglia conoscere la teorica generale dei parametri differenziali, stabilita sopra basi puramente analitiche, legga una Memoria del Prof. BELTRAMI, pubblicata dall'*Accademia di Bologna* (vol. VIII della 2ª serie, p. 549) ed un'altra del Prof. RICCI negli *Annali di matematica* (vol. XIV della 2ª serie, p. 1).

(**) Per una rotazione infinitesima degli assi (*cfr.* p. 30, § 3) la prima e la seconda derivata di V rispetto ad x_1 variano di

$$\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad , \quad 2\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \, ,$$

e però le metà delle variazioni di ΔV e $\Delta^2 V$ sono

$$\sum \left(\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial x_2}\right) \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \sum \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0 .$$

metri stessi, ***significati indipendenti dall'orientazione degli assi.*** Per esempio, sia V_1 la media dei valori che la funzione V assume sopra una superficie sferica, di raggio infinitesimo r, e V_0 il valore di V nel centro della sfera. Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, si ha

$$V = V_0 + x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{2}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \ldots + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots \right),$$

supponendo che tutte le derivate siano calcolate nel centro della sfera. Si moltiplichi per ds, e si integri a tutta la superficie sferica, osservando che

$$\int x_i ds = 0 \;,\quad \int x_2 x_3 ds = \ldots = 0 \;,\quad \int x_1^2 ds = \ldots = \frac{1}{3}\int r^2 ds = \frac{1}{3} s r^2.$$

Si ottiene, dividendo per sr^2,

$$\lim_{r=0} \frac{V_1 - V_0}{r^2} = \frac{1}{6} \Delta^2 V.$$

Una eguaglianza analoga si può stabilire per ΔV, considerando la media dei valori di V^2. Tali eguaglianze rendono evidente la proprietà invariantiva di ΔV e $\Delta^2 V$.

2. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i coseni che definiscono una direzione qualunque. L'integrale di $\alpha_i \alpha_j ds$, esteso ad una superficie sferica di raggio 1, ha il valore $\frac{4\pi}{3}$ o il valore 0, secondo che $i = j$ o $i \neq j$. Infatti nel primo caso si può scrivere

$$\int \alpha_i^2 ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\psi = 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3},$$

e nel secondo

$$\int \alpha_i \alpha_j ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi = 0 .$$

Ciò premesso, la derivata di V nella direzione considerata è

$$\frac{dV}{d\sigma}=\alpha_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial V}{\partial x_3}. \tag{1}$$

Ne segue, quadrando, moltiplicando per ds ed integrando a tutta la sfera,

$$\int\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 ds=\frac{4\pi}{3}\Delta V.$$

Similmente, se si osserva che

$$\frac{d^2V}{d\sigma^2}=\alpha_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\alpha_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\ldots+2\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}+\ldots, \tag{2}$$

si ottiene, moltiplicando per ds ed integrando,

$$\int\frac{d^2V}{d\sigma^2}ds=\frac{4\pi}{3}\Delta^2 V.$$

Dunque i valori di $\Delta^2 V$ e ΔV sono proporzionali ai valori medii delle derivate seconde e dei quadrati delle derivate prime in tutte le direzioni che si possono considerare intorno a ciascun punto (*).

3. Il significato invariantivo di ΔV si può anche dedurre immediatamente dalla formola (1), considerando la direzione definita da coseni proporzionali alle derivate prime di V. Sia θ l'angolo di questa direzione con l'altra $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Alla (1) si può dar la forma

$$\frac{dV}{d\sigma}=\sqrt{\Delta V}.\cos\theta.$$

Il *massimo* valore di $\frac{dV}{d\sigma}$ si ha dunque per $\theta=0$, ed è appunto $\sqrt{\Delta V}$. In altri termini $\sqrt{\Delta V}$ è la derivata di V nella direzione secondo la quale *più rapidamente* varia la funzione. Si noti che questa direzione è precisamente quella della normale alla superficie

(*) Boussinesq: « *Cours d'Analyse infinitésimale* » (t. I, 2^{me} fasc., pp. 57, 71).

$V =$ costante. Similmente dalla formola (2) si deduce che le direzioni per le quali è nulla la derivata seconda costituiscono un cono quadrico, ed è ovvio che questo non può dipendere dagli assi. È dunque *invariante* il discriminante della forma quadratica (2), hessiano della funzione V, e godono della proprietà invariantiva anche le somme dei suoi minori principali del primo o del secondo ordine, ed in particolare $\Delta^2 V$. Altre interessanti interpretazioni si possono dare dei parametri differenziali. Tutte concorrono a dimostrare che « il parametro differenzial secondo è, per così dire, *la derivata per eccellenza*, una derivata che esprime ciò che di più generale si ha nel modo di variare della funzione » (*). Perciò il detto parametro ha importanza altissima in tutti i rami della Fisica matematica. « Quando una classe di fenomeni fisici dipende dalle variazioni d'una certa funzione, quasi sempre questa interviene per mezzo del suo parametro differenzial secondo, come se questo fosse *una derivata naturale*, più essenziale, più semplice ed in pari tempo più completa di tutte le derivate parziali, più o meno arbitrariamente scelte, che si ha l'uso di considerare » (**).

4. I parametri differenziali si presentano anche molto naturalmente quando si fa uso dei *quaternioni* (***), o numeri complessi risultanti dalla riunione, per via additiva, d'uno *scalare* (numero reale, privo del senso di direzione) e d'un *vettore*, che nello spazio definisce, in grandezza e direzione, un segmento rettilineo, mediante le sue projezioni su tre assi ortogonali qualunque. Così lo spostamento (u, v, w) d'un punto è un vettore $\omega = iu + jv + kw$, e la doppia rotazione del mezzo è un altro vettore $\mathfrak{T} = i\mathfrak{T}_1 + j\mathfrak{T}_2 + k\mathfrak{T}_3$, in cui le *unità* i, j, k, linearmente indipendenti, sono soltanto soggette alle condizioni

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ , \quad jk = -kj = i \ , \quad ki = -ik = j \ , \quad ij = -ji = k .$$

È invece scalare la dilatazione Θ. Quando si applica l'operatore (****) di Hamilton

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

(*) BOUSSINESQ, *loc. cit.*, p. 72.
(**) LAMÉ: « *Leçons sur les coordonnées curvilignes* », § XV.
(***) Consiglio vivamente al lettore lo studio dei capitoli « *Cinematica* » ed « *Applicazioni fisiche* » nel *Trattatp elementare dei quaternioni* di TAIT.
(****) TAIT, *loc. cit.*, seconda parte, p. 35.

allo spostamento, intendendo conservate le proprietà dell'ordinario calcolo algebrico (tranne, per necessità, la proprietà commutativa della moltiplicazione), si ottiene

$$\nabla\omega = -\Theta + \mathfrak{T},$$

vale a dire che la *condensazione* e la doppia *rotazione* del mezzo sono rispettivamente la parte scalare e la parte vettoriale di $\nabla\omega$. Quando invece l'operatore ∇ si applica ad uno scalare, si può soltanto dire che il quadrato del modulo del risultato è precisamente uguale al parametro differenziale del primo ordine dello scalare stesso, cioè $|\nabla|^2 = \Delta$. Ripetendo ancora sul primo risultato l'operazione ∇ si ottiene

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\Delta^2,$$

e ciò resta vero, manifestamente, quando si opera sopra un vettore, di guisa che il parametro differenziale secondo non è, a prescindere dal segno, che il risultato di due operazioni ∇, applicate successivamente. Quì è utile segnalare la semplicità grandissima che assumono i problemi di elasticità quando si fa uso dei simboli testè definiti. Le tre equazioni indefinite dell'equilibrio elastico nei mezzi isotropi (IV, § 5) si riassumono nell'unica $\mathfrak{F} = \nabla\varphi$, dove $\mathfrak{F}$ è il vettore rappresentativo della forza di massa, cioè $iX + jY + kZ$, e φ rappresenta il quaternione $-A\Theta + B\mathfrak{T}$, leggiera modificazione di $\nabla\omega$. Del resto, l'introduzione del vettore $\Omega = iU + jV + kW$, considerato nel *cap.* XII (§§ 4, 5), permette di scrivere, innanzi tutto, $\nabla\Omega = 4\pi\varphi$, e finalmente $\nabla^2\Omega = 4\pi\mathfrak{F}$. Così è resa manifesta la possibilità di ridurre sempre le quistioni di elasticità al problema di Dirichlet. Queste considerevoli semplificazioni non devono recar meraviglia quando si rifletta che « spesso in Fisica, per ragionare, non per calcolare, è desiderabile evitare l'esplicita introduzione delle coordinate cartesiane, ed è vantaggioso fissare l'attenzione sopra un punto dello spazio, preso in sè, non sulle sue tre coordinate, come sulla grandezza e la direzione d'una forza invece che sulle sue tre componenti. Questo modo di considerare le questioni geometriche e fisiche è più naturale dell'altro, e si presenta primo alla mente; nondimeno le idee che ne derivano non ebbero il loro completo sviluppo fino al giorno in cui Hamilton fece un secondo grande passo nello studio dello spazio mercè l'invenzione del calcolo dei quaternioni » (*).

5. Espressione di ΔV in coordinate curvilinee. Si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(*) Così si esprime MAXWELL nei preliminari (§ 10) del suo immortale « *Trattato di elasticità e magnetismo* ». Qui non so astenermi dal consigliare anche l'intera lettura di questi preziosi *preliminari*.

Quindi, elevando al quadrato e sommando, e tenendo conto dell'ortogonalità delle superficie coordinate e della formola (3) del precedente capitolo,

$$\Delta V = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{Q_3^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)^2. \tag{3}$$

6. **Espressione di $\Delta^2 V$ in coordinate curvilinee.** Prima trattiamo il caso particolare $V = q_i$. Dalla formola (4) del precedente capitolo si deduce

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i};$$

poi, facendo $j = 1, 2, 3$ e sommando,

$$\Delta^2 q_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Ora, osservando la predetta formola (4) ed invertendo l'ordine di certe differenziazioni, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial q_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_2}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_3}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$
$$= \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_1} + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_3}.$$

Ne segue, sommando,

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} + \frac{\partial x_3}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)$$
$$+ \frac{1}{Q_2^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} + \frac{\partial x_3}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)$$
$$+ \frac{1}{Q_3^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_3} + \frac{\partial x_2}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_3} + \frac{\partial x_3}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right).$$

Intanto, se si tiene presente la definizione di Q_k (*form.* 2 del *cap.* precedente), si ha

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}Q_k^2 = Q_k\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

Dunque

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\log Q_1 Q_2 Q_3 ,$$

e conseguentemente

$$\Delta^2 q_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial q_i} = \frac{1}{\nabla}\left(\nabla\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial \nabla}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\nabla}{Q_i^2}. \quad (4)$$

7. Passiamo al caso generale. Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} + \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Quindi, facendo $j = 1, 2, 3$ e sommando,

$$\Delta^2 V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\Delta^2 q_i + \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right).$$

L'espressione sottoposta al secondo segno sommatorio si può anche scrivere così:

$$\frac{1}{Q_i^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Dunque

$$\Delta^2 V = \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\Delta^2 q_i + \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2}\right) ; \quad (5)$$

poi, in virtù di (4),

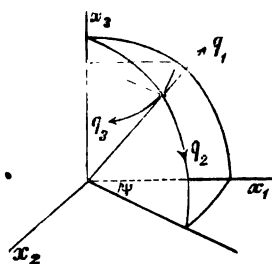
$$\Delta^2 V = \frac{1}{\nabla}\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\nabla}{Q_i^2} + \frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2}\right) = \frac{1}{\nabla}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) ,$$

cioè

$$\Delta^2 V = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3 Q_1}{Q_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1 Q_2}{Q_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\right].$$

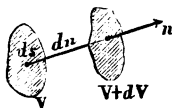
È questa l'importantissima *formola di Lamé* (*).

(*) « *Leçons* ... », § XIV. La dimostrazione qui data non differisce, in sostanza, da quella che LAMÉ stesso ha svolto nei §§ XII, XIII, XIV delle sue « *Leçons* ». Una formola più generale, relativa al caso di n variabili, si trova nella *Teorica dei determinanti* (p. 93) del Prof. BRIOSCHI.

8. **Applichiamola al sistema delle *coordinate polari*. In questo sistema si ha una famiglia di sfere concentriche, una famiglia di coni di rotazione, col vertice nel centro delle sfere e l'asse comune, e finalmente un fascio di piani col medesimo asse. I parametri sono il raggio r di ciascheduna sfera, l'angolo θ che le generatrici d'uno stesso cono fanno con l'asse di rotazione, e l'angolo ψ di ciascun piano con un piano fisso. In ogni punto incrociansi ad angoli retti un *raggio*, un *meridiano*, un *parallelo*. Lungo queste linee, che sono le *linee coordinate*, gli elementi lineari sono dr, $rd\theta$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta d\psi$. D'altra parte si sa che questi elementi sono espressi da $Q_1 dr$, $Q_2 d\theta$, $Q_3 d\psi$. Dunque**

$$Q_1 = 1 \quad , \quad Q_2 = r \quad , \quad Q_3 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \nabla = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta \ ,$$

e la formola di Lamé diventa

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right].$$

9. *Seconda dimostrazione* (*). La formola di Lamé si presenta in modo abbastanza semplice quando si cerca di stabilire l'equazione generale della teoria del calore in coordinate curvilinee. Rappresentiamo con V la temperatura nei diversi punti d'un mezzo omogeneo ed isotropo, e cerchiamo di esprimere la quantità di calore che, durante il tempo dt, attraversa un elemento piano ds. Prendiamo un elemento infinitamente vicino e parallelo al primo, alla temperatura $V + dV$, ed immaginiamo così formato un *muro* di spessore infinitesimo dn. È noto (**) che la differenza $V - (V + dV)$ delle temperature sulle due facce del muro, divisa per lo spessore e moltiplicata per un coefficiente c, detto coefficiente di *conducibilità calorifica*, dà la quantità di calore che passa durante l'unità di tempo per l'unità di superficie. Dunque il flusso di calore che attraversa ds durante il tempo dt è

$$c\,ds\,dt\,\frac{V - (V + dV)}{dn} = -c\frac{dV}{dn}ds\,dt.$$

(*) Anche dovuta a LAMÉ: « *Leçons*... », § XVI.

(**) Vedi, per esempio, JAMIN, « *Cours de physique* », 2[me] éd., t. II, p. 335.

Ciò premesso, si consideri il parallelepipedo costruito sugli elementi lineari $d\sigma_i = Q_i dq_i$, $(i=1,2,3)$. Esso riceve, attraverso la faccia ds_i, una quantità di calore espressa da $-\frac{c}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i dt$, e perde, attraverso la faccia opposta, la quantità

$$-\left[\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i\right) dq_i\right] c\,dt\,,$$

dimodochè resta nell'elemento di spazio la quantità di calore

$$c\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i\right) dq_i dt = c\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) dq_1 dq_2 dq_3 dt\,.$$

La quantità totale di calore che l'elemento dS acquista nel tempo dt è dunque

$$\frac{c\,dS\,dt}{\nabla}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

D'altra parte è noto che questa quantità di calore dev'essere proporzionale all'elevazione di temperatura, $\frac{\partial V}{\partial t} dt$, ed alla massa ρdS, e che il coefficiente di proporzionalità è il calorico specifico C. Dunque l'espressione (6) equivale a

$$C\frac{\partial V}{\partial t}\rho\,dS\,dt\,.$$

Dal paragone risulta, chiamando k la costante $\frac{C\rho}{c}$,

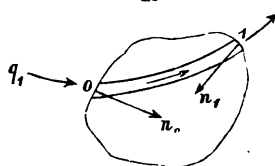
$$\frac{1}{\nabla}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = k\frac{\partial V}{\partial t}\,.$$

Il secondo membro, in forza del suo significato fisico, non può dipendere dal sistema di coordinate prescelto. Dunque il primo membro conserva inalterato il proprio valore quando si specializza il sistema di coordinate. Nel caso delle coordinate cartesiane esso diventa $\Delta^2 V$ perchè si ha $q_i = x_i$, $Q_i = 1$, $\nabla = 1$. Resta così dimostrata la formola di Lamé, e nel tempo stesso si vede che la propagazione del

calore nei mezzi omogenei ed isotropi è regolata dall'*equazione di Fourier* $\Delta^2 V = k\frac{\partial V}{\partial t}$. In particolare si osservi che, se un corpo è in equilibrio di temperatura, dev'essere soddisfatta l'equazione $\Delta^2 V = 0$ (*equazione di* (*) *Laplace*), in tutti i suoi punti.

10. Trasformazione di integrali. Sia V una funzione finita, continua ed uniforme, e si consideri l'integrale triplo

$$\int \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dS}{\nabla}.$$

Per una linea q_1 conduciamo le superficie q_2 e q_3, e consideriamo le due superficie infinitamente vicine, $q_2 + dq_2$ e $q_3 + dq_3$. Queste quattro superficie staccano dallo spazio un *canaletto*. Scomponiamo il corpo in una infinità di simili canaletti, che supporremo percorsi nel senso in cui si computano le q_1, e distinguiamo con indici 0 ed 1 rispettivamente tutto ciò che si riferisce ai punti di *entrata* e di *uscita* dei canaletti sulla superficie del corpo. Ciò premesso, l'integrale considerato si può scrivere così

$$\iiint \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 = \iint dq_2 dq_3 \int \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 = \iint (V_1 - V_0)\, dq_2 dq_3.$$

Ciascun canaletto stacca dalla superficie un elemento ds_0 o ds_1, la cui projezione sul piano tangente alla superficie q_1, nel punto che si considera, dà la sezione retta del canaletto, cioè un rettangolo che ha per dimensioni $Q_2 dq_2$, $Q_3 dq_3$. Siccome l'angolo della linea q_1 con la normale alla superficie del corpo è acuto all'entrata, ottuso all'uscita, si ha

$$Q_2 Q_3 dq_2 dq_3 = ds_0 \cos(n_0, q_1) \text{ all'entrata}, \quad Q_2 Q_3 dq_2 dq_3 = -ds_1 \cos(n_1, q_1) \text{ all'uscita},$$

e però

$$\iint V_1 dq_2 dq_3 - \iint V_0 dq_2 dq_3$$
$$= -\int \frac{V_1 \cos(n_1 q_1)}{Q_2 Q_3} ds_1 - \int \frac{V_0 \cos(n_0 q_1)}{Q_2 Q_3} ds_0 = -\int \frac{V \cos(n q_1)}{Q_2 Q_3} ds.$$

Dunque

$$\int \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dS}{\nabla} = -\int Q_1 V \cos(n q_1) \frac{ds}{\nabla}. \qquad (7)$$

In questa formola è inclusa la (9) del *cap.* I.

(*) « *Mécanique céleste* » (liv. III, XI).

11. *Terza dimostrazione* (*). La trasformazione (7) ci mette in grado di esporre un'altra bella dimostrazione della formola di Lamé. Si consideri l'integrale

$$J = \int \Delta V . dS\,,$$

e vi si faccia variare V. In virtù di (3) si può scrivere

$$J = \int \left[\frac{\nabla}{Q_1^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{\nabla}{Q_2^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{\nabla}{Q_3^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_3} \right)^2 \right] \frac{dS}{\nabla}\,;$$

poi, prendendo le variazioni ed integrando per parti,

$$\frac{1}{2} \delta J = \int \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial \delta V}{\partial q_1} + \frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial \delta V}{\partial q_2} + \frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \frac{\partial \delta V}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta V \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta V \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \delta V \right) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right] \delta V . \frac{dS}{\nabla}.$$

Adoperando (7) si riconosce che il primo integrale si trasforma in

$$- \int \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cos(nq_1) + \frac{1}{Q_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \cos(nq_2) + \frac{1}{Q_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \cos(nq_3) \right) \delta V ds$$

cioè in $- \int \delta V . \frac{dV}{dn} ds$. Dunque

$$\frac{1}{2} \delta J = - \int \delta V \frac{dV}{dn} ds - \int \delta V \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\nabla}{Q_i^2} \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \right\} \frac{dS}{\nabla}.$$

In particolare, prendendo coordinate cartesiane,

$$\frac{1}{2} \delta J = - \int \delta V \frac{dV}{dn} ds - \int \delta V . \Delta^2 V . dS\,.$$

(*) Dovuta a JACOBI (2° vol. delle « *Math. Werke* »).

Eguagliando le due espressioni di δJ, ed osservando che le δV relative ai diversi punti del corpo sono completamente indipendenti le une dalle altre, si vede che dev'essere vera in ogni punto dello spazio la formola di Lamé.

XX. SISTEMI ISOTERMI.

1. **Superficie di livello, equipotenziali, isoterme, isostatiche.** Benchè non tutto ciò che siamo per esporre abbia importanza diretta nella teoria della elasticità, crediamo sommamente utile parlarne, sia per dare maggiore evidenza alla teoria delle coordinate curvilinee, sia per mettere in luce i legami esistenti fra i diversi rami della Fisica matematica. In tutte le teorie matematiche dei fenomeni naturali si è condotti alla nozione d'una certa funzione, ed allo studio delle superficie su cui questa funzione resta costante: sono esse le superficie *di livello* nell'idrostatica, le superficie *equipotenziali* nella teoria dell'attrazione universale, le superficie *isoterme* nella teoria del calore. Dal punto di vista geometrico non si hanno differenze essenziali fra tutte queste famiglie di superficie. Ci basterà dunque parlare delle superficie isoterme.

2. Se un corpo è in equilibrio di temperatura, esso si può considerare come il luogo geometrico d'una infinità di superficie, su ciascuna delle quali è costante la temperatura V. Se q è il parametro di questa famiglia di superficie, dette isoterme, V non può variare se non varia q, e però V è funzione soltanto di q. Quindi si ha, successivamente,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\frac{dV}{dq}\frac{\partial q}{\partial x_i}\ ,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}=\frac{dV}{dq}\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}+\frac{d^2V}{dq^2}\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)^2;\quad (i=1,2,3)$$

poi, sommando,

$$\Delta^2 V=\frac{dV}{dq}\Delta^2 q+\frac{d^2V}{dq^2}\Delta q\,.$$

Abbiamo visto che per l'equilibrio di temperatura deve essere $\Delta^2 V = 0$. Ne segue

$$\frac{\Delta^2 q}{\Delta q} = - \frac{\frac{d^2 V}{dq^2}}{\frac{dV}{dq}}. \qquad (1)$$

Se si osserva che il secondo membro è funzione della sola q si arriva alla seguente conclusione: *Perchè una famiglia di superficie, di parametro* q, *sia isoterma, è necessario che il rapporto dei parametri differenziali di* q *sia funzione di* q *soltanto* (*). Questa condizione *è anche sufficiente*. Infatti, supponendo che si sia trovato il rapporto dei parametri differenziali di q espresso da $\varphi(q)$, cerchiamo di determinare V. L'equazione (1) diventa

$$\frac{d}{dq} \log \frac{dV}{dq} = - \varphi(q),$$

e se ne deduce, con due integrazioni successive, $V = \lambda\tau + \mu$, con λ e μ costanti arbitrarie, e

$$\tau = \int e^{-\int \varphi(q) dq} dq.$$

La funzione τ dipende da q soltanto. Si può dunque assumerla come parametro della famiglia di superficie, distinguendola da q col nome di *parametro termometrico,* poichè verifica l'equazione delle temperature stazionarie $\Delta^2 \tau = 0$. Si osservi che l'adozione del parametro termometrico introduce semplificazioni notevoli nei calcoli in coordinate curvilinee. In particolare, se q_1, q_2, q_3 sono i parametri termometrici d'una triplice famiglia di superficie coordinate, la formola di Lamé diventa

$$\Delta^2 V = \frac{1}{Q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} + \frac{1}{Q_3^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2}.$$

Basta, per accertarsene, supporre $\Delta^2 q_i = 0$ nella formola (5) del precedente capitolo.

(*) Proposizione importante, dovuta a LAMÉ: « *Leçons* », §§ XX, XXI.

3. È utile conoscere alcune famiglie di superficie isoterme. In primo luogo facciamo osservare che le famiglie costituenti il sistema delle coordinate polari sono tutte isoterme. Infatti per le sfere concentriche si ha $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$; quindi

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \quad , \quad \Delta r = 1 \quad , \quad \Delta^2 r = \frac{2}{r} \quad , \quad \frac{\Delta^2 r}{\Delta r} = \frac{2}{r} .$$

Se poi si vuole il parametro termometrico, si ha

$$\varphi(r) = \frac{2}{r} \quad , \quad \int \varphi(r)\, dr = 2 \log r \quad , \quad \int e^{-\int \varphi(r) dr} dr = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} \quad ,$$

e si può prendere $\tau = \frac{1}{r}$. Con ciò si può conoscere la distribuzione della temperatura in un involucro sferico le cui superficie terminali siano mantenute a temperature costanti V_0 e V_1. Si ha infatti $V = \frac{\lambda}{r} + \mu$, e le costanti λ e μ si determinano mediante le equazioni $\frac{\lambda}{r_0} + \mu = V_0$, $\frac{\lambda}{r_1} + \mu = V_1$. In modo analogo si dimostra l'isotermìa delle famiglie di coni e di piani, i cui parametri termometrici sono rispettivamente $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ e ψ.

4. Tre interessanti famiglie di superficie isoterme sono poi fornite dalle superficie omofocali del secondo ordine. Queste sono rappresentate dall'equazione

$$\frac{x_1^2}{q^2 - \alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{q^2 - \alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{q^2 - \alpha_3^2} = 1 \ , \tag{2}$$

in cui si deve supporre $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$. Si hanno *ellissoidi* per q superiore a b e c; *iperboloidi ad una falda* per q compreso fra b e c; *iperboloidi a due falde* per q inferiore a b e c. Si hanno dunque *tre* famiglie di superficie, ed è noto dalla Geometria analitica che queste famiglie sono fra loro ortogonali due a due. Ora dimostreremo, mediante la regola di Lamé, che una qualunque di queste famiglie è isoterma. Derivando parzialmente (2) e ponendo

$$M = \frac{x_1^2}{(q^2 - \alpha_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(q^2 - \alpha_2^2)^2} + \frac{x_3^2}{(q^2 - \alpha_3^2)^2} \ ,$$

si ottiene

$$\frac{x_i}{q^2 - \alpha_i^2} = Mq \frac{\partial q}{\partial x_i} \ ; \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

poi, quadrando e sommando,

$$\Delta q = \frac{1}{Mq^2} .$$

Similmente si ottiene, dopo una nuova derivazione,

$$\frac{1}{q^2-\alpha_1^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_2^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_3^2}$$
$$=M\Delta q+Mq\Delta^2 q+\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Ora, ponendo

$$N=\frac{x_1^2}{(q^2-\alpha_1^2)^3}+\frac{x_2^2}{(q^2-\alpha_2^2)^3}+\frac{x_3^2}{(q^2-\alpha_3^2)^3},$$

si ha

$$\frac{\partial M}{\partial x_i}=\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}-4Nq\frac{\partial q}{\partial x_i},$$

e però

$$\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}=4q\sum_i\frac{x_i\frac{\partial q}{\partial x_i}}{(q^2-\alpha_i^2)^2}-4Nq^2\Delta q.$$

Del resto, in virtù di (3),

$$\sum_i\frac{x_i\frac{\partial q}{\partial x_i}}{(q^2-\alpha_i^2)^2}=\frac{1}{Mq}\sum_i\frac{x_i^2}{(q^2-\alpha_i^2)^3}=\frac{N}{Mq}.$$

Per conseguenza

$$\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}=\frac{4N}{M}-4Nq^2\Delta q=0,$$

e l'eguaglianza (4) diventa

$$\frac{1}{q^2-\alpha_1^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_2^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_3^2}=\frac{1}{q^2}+Mq\Delta^2 q.$$

Dunque, finalmente,

$$\frac{\Delta^2 q}{\Delta q}=\frac{q}{q^2-b^2}+\frac{q}{q^2-c^2}=\varphi(q)\;;\quad \text{ecc.}$$

5. Molto interessanti, anche dal punto di vista della pura Analisi, sono le famiglie di superficie coordinate, costituite come segue: una famiglia di piani paralleli, e due famiglie di cilindri perpendicolari a questi piani ed ortogonali fra loro. Vogliamo dimostrare che, se una famiglia di cilindri è isoterma, anche la famiglia ortogonale alla prima è isoterma. Qui si ha $Q_3=1$, mentre Q_1 e

Q_2 sono funzioni di q_1 e q_2, ma non di $q_3 = z$. È noto (*cap.* XVII, form. 3; *cap.* XVIII, form. 4) che

$$\Delta q_i = \frac{1}{Q_i^2} \quad , \quad \Delta^2 q_i = \frac{1}{\nabla} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\nabla}{Q_i^2} \, ;$$

poi

$$\frac{\Delta^2 q_i}{\Delta q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \log \frac{\nabla}{Q_i^2} \, ,$$

cioè

$$\frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \log \frac{Q_2}{Q_1} \quad , \quad \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \log \frac{Q_1}{Q_2} . \tag{5}$$

Per conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = 0 .$$

Se la famiglia q_1 è isoterma, la regola di Lamé (§ 2) ci dice che $\frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1}$ non dipende da q_2, e l'ultima equazione fa vedere che, in tal caso, $\frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2}$ non dipende da q_1. Dunque la famiglia q_2 è isoterma. Se per q_1 e q_2 si prendono i parametri termometrici, le formole (5) mostrano che $\frac{Q_1}{Q_2}$ è costante. È chiaro che un parametro termometrico si può sempre moltiplicare per una costante, senza che perda la sua proprietà caratteristica. Allora, in virtù d'una nota formola (*cap.* XVII, form. 3), la corrispondente funzione Q risulta moltiplicata per una costante. Si può dunque fare in modo che il rapporto $\frac{Q_1}{Q_2}$ sia uguale all'unità. In tal caso, ponendo $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{h}$, la formola di Lamé assume la forma semplicissima

$$\Delta^2 V = h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} .$$

6. Si possono costruire infinite coppie di famiglie di cilindri isotermi ed ortogonali, prendendo i parametri q_1 e q_2 uguali rispettivamente alla parte reale ed al coefficiente di $\sqrt{-1}$ in una funzione della variabile complessa $x_1 + x_2 \sqrt{-1}$. È noto che si ha

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \, ,$$

e si vede subito che $\Delta^2 q_1 = 0$, $\Delta^2 q_2 = 0$. Ciò prova l'isotermìa delle due famiglie di cilindri, e mostra in pari tempo che q_1 e q_2 sono appunto i parametri termometrici delle due famiglie. Inoltre si vede che

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \, ,$$

e questa è precisamente la condizione di ortogonalità. Inversamente è facile ve-

dere che la costruzione precedente fornisce *tutte* le possibili famiglie di cilindri isotermi ed ortogonali. Si è visto infatti che in tali famiglie si può sempre supporre $Q_1 = Q_2$, cioè

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2,$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2.$$

D'altra parte si ha, per esprimere l'ortogonalità, l'eguaglianza

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial q_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_2}.$$

Moltiplicando questa per $2\sqrt{-1}$, sommando con l'eguaglianza precedente ed estraendo la radice quadrata, si ottiene

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\sqrt{-1} = \pm\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2}\sqrt{-1}\right),$$

cioè, simultaneamente,

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \pm\frac{\partial q_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \mp\frac{\partial q_2}{\partial x_1}.$$

Dunque $q_1 + q_2\sqrt{-1}$ è funzione di $x_1 + x_2\sqrt{-1}$.

7. « Se l'idrostatica e la teoria del potenziale hanno introdotto le famiglie di superficie di livello o equipotenziali, la teoria del calore quelle di superficie isoterme, è la teoria matematica dell'equilibrio di elasticità nei corpi solidi che ha dato luogo alla considerazione di tre famiglie conjugate ed ortogonali. Risulta infatti da questa teoria che in ogni punto d'un solido in equilibrio di elasticità esistono sempre tre elementi piani ortogonali, sollecitati normalmente dalle forze elastiche. Se dunque si considerano contemporaneamente queste terne di elementi in tutti i punti del corpo, variando in modo continuo le loro posizioni, esse formeranno (*) tre

(*) Disgraziatamente queste superficie non esistono, in generale; poichè se, in un piano, una coppia di direzioni ortogonali, definita per ogni punto, può sempre considerarsi come quella delle tangenti, in questo punto, alle due linee d'un sistema doppio ortogonale, nello spazio invece non ha luogo l'analoga proprietà per una terna ortogonale di elementi piani, pure definita in ogni punto. Weingarten, in una Memoria « *Zur Theorie der isostatischen Flächen* » (*Giornale di Crelle*, 1881, p. 18), ha fatto la ricerca delle condizioni restrittive sotto le quali si verifica l'esistenza d'un sistema isostatico. La questione si può anche trattare mediante le « *Formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* » sviluppate dal Prof. Beltrami nei *Rendiconti dell'Istituto lombardo* (1872, p. 474).

famiglie di superficie ortogonali, costituenti ciò che si chiama un *sistema isostatico*, e dotate della proprietà fondamentale di essere le sole superficie sollecitate normalmente dalle forze elastiche... Si capisce che ogni sistema ortogonale può diventare occasionalmente isostatico, quando quelle sue superficie che formano le pareti del solido subiscono pressioni normali: basta che i segni e le intensità di queste pressioni variino convenientemente da un punto all'altro della superficie. La proprietà di essere isostatica è dunque di natura ben diversa da quella di essere isoterma, che appartiene soltanto a certe famiglie di superficie. Ma la vera proprietà fondamentale di ogni sistema isostatico è la riunione obbligata di tre famiglie di superficie e la loro ortogonalità necessaria. È da questa proprietà, così nettamente caratterizzata, che è sorta l'idea delle coordinate curvilinee... L'uso di queste è indispensabile quando si vogliano trattare corpi di determinate forme nei varii rami della Fisica matematica, nei quali, infatti, si tratta sempre d'integrare, vale a dire di determinare una o più funzioni che debbono verificare una o più equazioni alle derivate parziali seconde, esprimenti le leggi fisiche cui obbediscono le funzioni stesse. Ed inoltre queste funzioni o i loro integrali generali debbono verificare altre equazioni alle derivate parziali prime per tutti i punti della superficie del corpo che si considera. Ora questo problema di doppia integrazione sarebbe completamente inaccessibile se non si pervenisse a riferire i punti del corpo ad un sistema di coordinate tali che la superficie sia rappresentata uguagliando ad una costante una delle coordinate..... Se l'idea delle coordinate curvilinee è venuta dalla teoria matematica dell'elasticità, è anche in questa teoria che il nuovo strumento conduce alle leggi più complete ed incontra il maggior numero di applicazioni. Le equazioni dell'elasticità, trasformate mediante i diversi parametri del sistema ortogonale, si presentano sotto la forma che meglio si presta alle integrazioni... I sistemi di coordinate caratterizzano le fasi o le tappe della Scienza. Senza l'invenzione delle coordinate rettilinee l'Algebra sarebbe forse ancora al punto in cui la lasciarono Diofante ed i suoi commentatori, e non avremmo nè il Calcolo infinitesimale nè la Meccanica analitica.

Senza l'introduzione delle coordinate sferiche la Meccanica celeste sarebbe stata assolutamente impossibile. Senza le coordinate ellittiche, illustri Geometri non avrebbero potuto risolvere parecchie questioni importanti di questa teoria, che restavano sospese; ed il regno di questo terzo genere di coordinate speciali comincia appena. Ma quando esso avrà trasformate e completate tutte le soluzioni della Meccanica celeste, bisognerà occuparsi seriamente della Fisica matematica o della Meccanica terrestre. Allora verrà necessariamente il regno delle coordinate curvilinee qualunque, che sole potranno trattare le nuove questioni in tutta la loro generalità » (*).

XXI. EQUAZIONI GENERALI DELL'ELASTICITÀ IN COORDINATE CURVILINEE (**).

1. Abbiamo visto che l'elemento lineare è dato, in coordinate curvilinee ortogonali, dalla formola

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Ne segue, facendo variare la posizione di ciascun punto,

$$d\sigma\,\delta d\sigma = Q_1^2 dq_1 \delta dq_1 + Q_2^2 dq_2 \delta dq_2 + Q_3^2 dq_3 \delta dq_3$$
$$+ Q_1 \delta Q_1 . dq_1^2 + Q_2 \delta Q_2 . dq_2^2 + Q_3 \delta Q_3 . dq_3^2.$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono i coseni direttori dell'elemento si ha

$$\alpha_1 = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} \quad , \quad \alpha_2 = Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} \quad , \quad \alpha_3 = Q_3 \frac{dq_3}{d\sigma} \quad ,$$

(*) LAMÉ: « *Leçons sur les coord. curvilignes* ». Discours préliminaire, e §§ CXLVIII, CC.

(**) Vedi negli *Annali di Matematica* (1881) la Memoria del Prof. BELTRAMI: *Sulle equazioni generali dell'elasticità.*

e l'eguaglianza precedente si può scrivere così:

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\alpha_1 Q_1\frac{\delta dq_1}{d\sigma}+\alpha_2 Q_2\frac{\delta dq_2}{d\sigma}+\alpha_3 Q_3\frac{\delta dq_3}{d\sigma}+\alpha_1^2\frac{\delta Q_1}{Q_1}+\alpha_2^2\frac{\delta Q_2}{Q_2}+\alpha_3^2\frac{\delta Q_3}{Q_3}.$$

Ora si osservi che

$$\delta dq_i = d\delta q_i = \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_3}dq_3.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\alpha_1 Q_1\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_3}\right)+\alpha_1^2\frac{\delta Q_1}{Q_1}\\ +\alpha_2 Q_2\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}\right)+\alpha_2^2\frac{\delta Q_2}{Q_2}\\ +\alpha_3 Q_3\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_3}\right)+\alpha_3^2\frac{\delta Q_3}{Q_3}.\end{aligned}$$

Per conseguenza, se si pone

$$\left\{\begin{aligned}\delta\theta_1&=\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}+\frac{\delta Q_1}{Q_1}, & \delta\omega_1&=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}+\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\\ \delta\theta_2&=\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}+\frac{\delta Q_2}{Q_2}, & \delta\omega_2&=\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_1}+\frac{Q_1}{Q_3}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_3}\\ \delta\theta_3&=\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_3}+\frac{\delta Q_3}{Q_3}, & \delta\omega_3&=\frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_2}+\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_1}\end{aligned}\right. \tag{1}$$

si ottiene

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\alpha_1^2\delta\theta_1+\alpha_2^2\delta\theta_2+\alpha_3^2\delta\theta_3+\alpha_2\alpha_3\delta\omega_1+\alpha_3\alpha_1\delta\omega_2+\alpha_1\alpha_2\delta\omega_3. \tag{2}$$

2. **Equazioni generali.** Prendiamo il corpo *già deformato ed equilibrato* sotto l'azione delle forze di massa $(F_1 dS, F_2 dS, F_3 dS)$, delle pressioni in superficie $(\varphi_1 ds, \varphi_2 ds, \varphi_3 ds)$, e delle forze interne. Immaginiamo, intorno a questa posizione di equilibrio, un moto virtuale, che conduca ciascun punto (q_1, q_2, q_3) nella posizione $(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, q_3+\delta q_3)$, essendo arbitrarie per ogni punto le variazioni $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$. Il lavoro delle forze esterne è, per ciascun punto del corpo,

$$Q_1 F_1 \delta q_1 + Q_2 F_2 \delta q_2 + Q_3 F_3 \delta q_3$$

per unità di volume, e per ciascun punto della superficie

$$Q_1\varphi_1\delta q_1 + Q_2\varphi_2\delta q_2 + Q_3\varphi_3\delta q_3$$

per unità di superficie. Quanto al lavoro delle forze interne, esso è unicamente dovuto all'alterazione delle distanze relative dei punti del corpo, e però dipende, in virtù di (2), dalle variazioni $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3, \delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3$. Poichè queste sono piccolissime per ipotesi, il detto lavoro, computato in ogni punto per unità di volume, sarà rappresentato da un'espressione

$$\Theta_1\delta\theta_1 + \Theta_2\delta\theta_2 + \Theta_3\delta\theta_3 + \Omega_1\delta\omega_1 + \Omega_2\delta\omega_2 + \Omega_3\delta\omega_3,$$

in cui le Θ e le Ω sono certe funzioni di q_1, q_2, q_3. L'applicazione del *principio di Lagrangia* conduce dunque all'eguaglianza

$$\int (Q_1F_1\delta q_1 + Q_2F_2\delta q_2 + Q_3F_3\delta q_3)\,dS + \int (Q_1\varphi_1\delta q_1 + Q_2\varphi_2\delta q_2 + Q_3\varphi_3\delta q_3)\,ds$$
$$+ \int (\Theta_1\delta\theta_1 + \Theta_2\delta\theta_2 + \ldots + \Omega_3\delta\omega_3)\,dS = 0. \qquad (3)$$

Cerchiamo ora di svincolare, col solito processo, le variazioni δq_1, δq_2, δq_3 nel terzo integrale, in modo da farle comparire esplicitamente, come nei primi due integrali. Si ha, ricordando (1),

$$\int \Theta_1\delta\theta_1\,dS = \int \nabla\Theta_1 \frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}\cdot\frac{dS}{\nabla} + \int \frac{\Theta_1}{Q_1}\delta Q_1\,dS.$$

Integrando per parti, ed utilizzando una nota (XIX, § 10) trasformazione, si riconosce che il primo integrale equivale a

$$\int \frac{\partial}{\partial q_1}(\nabla\Theta_1\delta q_1)\frac{dS}{\nabla} - \int \delta q_1 \frac{\partial\nabla\Theta_1}{\partial q_1}\cdot\frac{dS}{\nabla}$$
$$= -\int Q_1\Theta_1\cos(nq_1)\,\delta q_1\,ds - \int \delta q_1 \frac{\partial\nabla\Theta_1}{\partial q_1}\frac{dS}{\nabla}.$$

Similmente

$$\int \Omega_1\delta\omega_1\,dS = \int \left(\frac{Q_2\Omega_1}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3} + \frac{Q_3\Omega_1}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\right)dS$$
$$= \int Q_2{}^2 Q_1\Omega_1 \frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}\frac{dS}{\nabla} + \int Q_3{}^2 Q_1\Omega_1 \frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\frac{dS}{\nabla}.$$

Ora si ha

$$\int Q_2^2 Q_1 \Omega_1 \frac{\partial \delta q_2}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla} = \int \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_2^2 Q_1 \Omega_1 \delta q_2) \frac{dS}{\nabla} - \int \delta q_2 \frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla}$$

$$= - \int Q_2 \Omega_1 \cos(nq_3) \delta q_2 ds - \int \delta q_2 \frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla}.$$

Per conseguenza

$$\int \Omega_1 \delta \omega_1 dS = - \int [Q_2 \cos(nq_3) \delta q_2 + Q_3 \cos(nq_2) \delta q_3] \Omega_1 ds$$

$$- \int \left(\frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}.$$

Il lavoro delle forze interne si compone dunque di tre parti analoghe alla seguente:

$$- \int \delta q_1 \frac{\partial \nabla \Theta_1}{\partial q_1} \frac{dS}{\nabla} - \int \left(\frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$+ \int \frac{\Theta_1}{Q_1} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int Q_1 \Theta_1 \cos(nq_1) \delta q_1 ds - \int [Q_2 \cos(nq_3) \delta q_2 + Q_3 \cos(nq_2) \delta q_3] \Omega_1 ds.$$

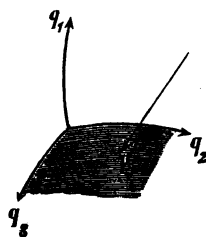
Sostituendo in (3), ed eguagliando a zero separatamente i moltiplicatori di δq_1, δq_2, δq_3, prima negli integrali di spazio, poi in quelli di superficie, si ottengono le *equazioni indefinite*

$$(4) \begin{cases} Q_1 F_1 = \frac{1}{\nabla} \left(\frac{\partial \nabla \Theta_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1^2 Q_3 \Omega_3}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_1^2 Q_2 \Omega_2}{\partial q_3} \right) - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\Theta_2}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{\Theta_3}{Q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \right) \\ Q_2 F_2 = \frac{1}{\nabla} \left(\frac{\partial Q_2^2 Q_3 \Omega_3}{\partial q_1} + \frac{\partial \nabla \Theta_2}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \right) - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\Theta_2}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\Theta_3}{Q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \right) \\ Q_3 F_3 = \frac{1}{\nabla} \left(\frac{\partial Q_3^2 Q_2 \Omega_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \nabla \Theta_3}{\partial q_3} \right) - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} + \frac{\Theta_2}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} + \frac{\Theta_3}{Q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} \right) \end{cases}$$

e le *equazioni ai limiti*

$$(5) \begin{cases} \varphi_1 = \Theta_1 \cos(nq_1) + \Omega_3 \cos(nq_2) + \Omega_2 \cos(nq_3) \\ \varphi_2 = \Omega_3 \cos(nq_1) + \Theta_2 \cos(nq_2) + \Omega_1 \cos(nq_3) \\ \varphi_3 = \Omega_2 \cos(nq_1) + \Omega_1 \cos(nq_2) + \Theta_3 \cos(nq_3) \end{cases}$$

Veramente, perchè queste relazioni siano le *equazioni dell'equilibrio*, che debbono servire a determinare la nuova forma del corpo e la nuova distribuzione delle azioni interne, è necessario che q_1, q_2, q_3 rappresentino le coordinate dei punti nelle loro posizioni naturali, e non le coordinate *incognite* che i punti acquistano per effetto della deformazione. Per avere le equazioni dell'equilibrio, se con q_1, q_2, q_3 indichiamo le coordinate *iniziali* e con $q_1+\kappa_1$, $q_2+\kappa_2$, $q_3+\kappa_3$ le coordinate *dopo la deformazione*, dimodochè gli spostamenti siano $Q_1\kappa_1$, $Q_2\kappa_2$, $Q_3\kappa_3$, bisogna nelle Q, nelle Θ, nelle Ω delle equazioni (4) e (5) sostituire le $q+\kappa$ alle q. Tale sostituzione altro non produce che un'addizione di termini, trascurabili rispetto a quelli già scritti, se, come si suppone, le κ sono trascurabili rispetto alle q. Dunque le equazioni (4) e (5) sono le equazioni dell'equilibrio, purchè si attribuisca alle q il loro nuovo significato, che sarà conservato d'ora innanzi.

3. **Osservazioni:** Il significato delle Θ e delle Ω risulta subito dalle equazioni (5). Queste sono evidentemente applicabili ad una superficie qualunque, interna al corpo, purchè si sopprima una porzione del corpo, situata da una stessa parte della superficie, e ad essa si sostituisca il sistema delle pressioni che la porzione stessa esercita sull'altra porzione. In particolare, se con p_1 rappresentiamo la pressione unitaria in un punto qualunque d'una superficie q_1, sopprimendo quella parte del corpo in cui crescono le q_1 (quando ci si allontana dalla superficie), si ha

$$\cos(nq_1) = -1 \quad , \quad \cos(nq_2) = \cos(nq_3) = 0 \, ,$$

e le formole (5) dànno $p_{11} = -\Theta_1$, $p_{12} = -\Omega_3$, $p_{13} = -\Omega_2$. Ripetendo tutto ciò per le altre superficie coordinate si vede che

$$-p_{11} = \Theta_1 \quad , \quad -p_{22} = \Theta_2 \quad , \quad -p_{33} = \Theta_3 \; ;$$
$$-p_{23} = -p_{32} = \Omega_1 \quad , \quad -p_{31} = -p_{13} = \Omega_2 \quad , \quad -p_{12} = -p_{21} = \Omega_3 \, .$$

Dunque le Θ rappresentano le *tensioni* unitarie che si sviluppano

normalmente alle superficie coordinate, e le Ω quelle che si sviluppano *tangenzialmente* alle superficie stesse. Queste Θ e queste Ω sono le incognite del problema; si tratta di integrare le equazioni (4) in modo che siano soddisfatte le (5) alla superficie del corpo. Abbiamo dunque tre equazioni per determinare *sei* funzioni; ma dobbiamo osservare che il concetto di *elasticità* non è stato ancora introdotto.

4. Prima di andare oltre è interessante profittare delle ultime osservazioni per vedere quale eleganza di forma conferisca la relazione (7) del *cap.* XVIII a certi risultati dell'Analisi. Per dimostrare la *legge* detta da Lamé *dei sistemi isostatici* immaginiamo che in un corpo, soggetto alle sole pressioni esterne, esista un sistema isostatico, i cui parametri si prendano per coordinate. In tal caso (*cap.* XX, § 7) sono nulle, per ogni punto del corpo, le pressioni tangenziali Ω_1, Ω_2, Ω_3, e le formole (4) diventano

$$\frac{1}{\nabla}\frac{\partial \nabla \Theta_i}{\partial q_i} = \frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il primo membro equivale a

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i} + \frac{\Theta_i}{\nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial q_i} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i} + \Theta_i\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right).$$

Per conseguenza, adoperando la citata relazione (7),

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \sigma_i} = \frac{\Theta_1 - \Theta_i}{r_{i1}} + \frac{\Theta_2 - \Theta_i}{r_{i2}} + \frac{\Theta_3 - \Theta_i}{r_{i3}}.$$

Quindi, facendo $i = 1, 2, 3$, si ottengono, tra le forze elastiche principali, le relazioni seguenti, segnalate da Lamé (*):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \sigma_1} &= \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{r_{12}} + \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{r_{13}}, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \sigma_2} &= \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{r_{23}} + \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{r_{21}}, \\ \frac{\partial \Theta_3}{\partial \sigma_3} &= \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{r_{31}} + \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{r_{32}}. \end{aligned}\right.$$

Queste relazioni costituiscono un complemento necessario della legge rappresen-

(*) « *Leçons* ... », § CXLIX.

tata dall'ellissoide di elasticità, poichè ci dicono come variano gli assi dell'ellissoide quando si passa da un punto qualunque ad un punto infinitamente vicino.

5. Ritornando alle questioni del § 2 ammettiamo una volta per sempre che le q siano le coordinate iniziali, e le $q+\kappa$ siano le coordinate finali. I moti virtuali consisteranno nel passaggio dalle posizioni $q+\kappa$ alle posizioni $q+\kappa+\delta(q+\kappa)=q+\kappa+\delta\kappa$, invece che nel passaggio dalle posizioni q alle posizioni $q+\delta q$. Perciò le δq del principio di questo capitolo sono ora rappresentate dalle $\delta\kappa$. Ne segue che, se si pone

$$\theta_1=\frac{\partial\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right),\quad \omega_1=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial\kappa_2}{\partial q_3}+\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial\kappa_3}{\partial q_2},\ \text{ecc.} \tag{6}$$

queste θ e queste ω sono precisamente le θ e le ω delle formole (1), giacchè facendo variare le κ nelle (6), mentre, naturalmente, restano invariate le q e le funzioni che ne dipendono, si ritrovano le formole (1) cambiando le $\delta\kappa$ in δq. Per avere poi il coefficiente di allungamento nella direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, basterà immaginare ripetuto il calcolo che si è fatto per ottenere la formola (2), salvo che nelle formole (1) bisognerà intendere alle δq sostituite le κ. In virtù di (6) ciò equivale a sostituire le θ e le ω alle $\delta\theta$ ed alle $\delta\omega$. Per conseguenza, il coefficiente richiesto è

$$\epsilon=\theta_1\alpha_1^2+\theta_2\alpha_2^2+\theta_3\alpha_3^2+\omega_1\alpha_2\alpha_3+\omega_2\alpha_3\alpha_1+\omega_3\alpha_1\alpha_2\,. \tag{7}$$

Qual'è il significato delle θ e delle ω? Siano $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ le projezioni di $d\sigma$ sulle linee coordinate, dimodochè $d\sigma_i=\alpha_i d\sigma$. Se $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono i valori di ϵ lungo le tangenti alle linee coordinate, e si suppone che gli angoli del parallelepipedo costruito sugli spigoli $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ diminuiscano di η_1, η_2, η_3, si ottiene, dopo la deformazione, un parallelepipedo obliquangolo, in cui la diagonale, gli spigoli, gli angoli sono $(1+\epsilon)d\sigma$, $(1+\epsilon_1)d\sigma, \ldots, \frac{\pi}{2}-\eta_1, \ldots$ Dunque si ha

$$(1+\epsilon)^2 d\sigma^2=(1+\epsilon_1)^2 d\sigma_1^2+(1+\epsilon_2)^2 d\sigma_2^2+(1+\epsilon_3)^2 d\sigma_3^2$$
$$+2(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3)d\sigma_2 d\sigma_3\,.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\eta_1\right)+\ldots,$$

e se ne deduce, dividendo per $d\sigma^2$ e trascurando infinitesimi di ordine superiore al primo,

$$\epsilon = \epsilon_1 \alpha_1^2 + \epsilon_2 \alpha_2^2 + \epsilon_3 \alpha_3^2 + \eta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \eta_2 \alpha_3 \alpha_1 + \eta_3 \alpha_1 \alpha_2 .$$

Così vediamo, paragonando con (7), che $\theta_i = \epsilon_i$, $\omega_i = \eta_i$, cioè le θ e le ω sono gli allungamenti unitarii degli spigoli e i decrescimenti degli angoli d'un elemento parallelepipedo, terminato da sei superficie coordinate.

6. Ed ora introduciamo nelle equazioni dell'equilibrio il concetto di elasticità. Questo, come si sa, si esprime scrivendo che il lavoro unitario elementare delle forze interne, cioè

$$\Theta_1 \delta\theta_1 + \Theta_2 \delta\theta_2 + \ldots + \Omega_3 \delta\omega_3 ,$$

è una variazione esatta rispetto alle quantità che definiscono la deformazione già avvenuta. Se poniamo, per brevità,

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \kappa_i}{\partial q_j} ,$$

le formole (6) si possono scrivere così:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \kappa_{11} + \frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , & \omega_1 &= \frac{Q_2}{Q_3}\kappa_{23} + \frac{Q_3}{Q_2}\kappa_{32} \\ \theta_2 &= \kappa_{22} + \frac{1}{Q_2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , & \omega_2 &= \frac{Q_3}{Q_1}\kappa_{31} + \frac{Q_1}{Q_3}\kappa_{13} \\ \theta_3 &= \kappa_{33} + \frac{1}{Q_3}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , & \omega_3 &= \frac{Q_1}{Q_2}\kappa_{12} + \frac{Q_2}{Q_1}\kappa_{21} \end{aligned} \right.$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro si ottiene

$$\delta\Pi = \Theta_1 \left[\delta\kappa_{11} + \frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\delta\kappa_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\delta\kappa_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\delta\kappa_3 \right) \right] + \ldots + \Omega_3 \left(\frac{Q_1}{Q_2}\delta\kappa_{12} + \frac{Q_2}{Q_1}\delta\kappa_{21} \right) ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \sum_i \left[\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i} \right] \delta\kappa_i \\ + \Theta_1 \delta\kappa_{11} + \frac{Q_1 \Omega_3}{Q_2}\delta\kappa_{12} + \frac{Q_1 \Omega_2}{Q_3}\delta\kappa_{13} \\ + \frac{Q_2 \Omega_3}{Q_1}\delta\kappa_{21} + \Theta_2 \delta\kappa_{22} + \frac{Q_2 \Omega_1}{Q_3}\delta\kappa_{23} \\ + \frac{Q_3 \Omega_2}{Q_1}\delta\kappa_{31} + \frac{Q_3 \Omega_1}{Q_2}\delta\kappa_{32} + \Theta_3 \delta\kappa_{33} . \end{aligned}$$

Si vede che Π è necessariamente funzione delle κ_i e delle κ_{ij}, e si deve avere

$$(9)\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} = \dfrac{\Theta_1}{Q_1}\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \dfrac{\Theta_2}{Q_2}\dfrac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \dfrac{\Theta_3}{Q_3}\dfrac{\partial Q_3}{\partial q_i}\,, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{ii}} = \Theta_i\,, \quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}} = \dfrac{Q_2 \Omega_1}{Q_3}\,, \quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}} = \dfrac{Q_3 \Omega_1}{Q_2}\,, \ldots \end{cases}$$

Paragonando fra loro i valori di Ω_1 si ottiene

$$\Omega_1 = \frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}} = \frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}} = \frac{\partial \Pi}{\partial\left(\frac{Q_2}{Q_3}\kappa_{23} + \frac{Q_3}{Q_2}\kappa_{32}\right)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_1}\;;\quad \text{ecc.}$$

Dunque le κ_{ij} $(i \neq j)$ non entrano in Π altrimenti che nelle combinazioni ω. Inoltre, osservando la prima delle (8), si può scrivere

$$\Theta_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{11}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}\,,\quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa_i} = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}\;;\quad \text{ecc.}$$

Per conseguenza possiamo dare alla prima delle (9) la forma seguente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3}\frac{\partial \theta_3}{\partial \kappa_i}\,.$$

Poichè le ω non contengono le κ_i, si vede che queste non possono entrare nell'espressione di Π altrimenti che nelle combinazioni θ_1, θ_2, θ_3. In riassunto, le *dodici* variabili

$$\kappa_1\,,\ \kappa_2\,,\ \kappa_3\,,\ \kappa_{11}\,,\ \kappa_{22}\,,\ \kappa_{33}\,,\ \kappa_{23}\,,\ \kappa_{32}\,,\ \kappa_{31}\,,\ \kappa_{13}\,,\ \kappa_{12}\,,\ \kappa_{21}\,,$$

da cui deve dipendere l'espressione di Π, si aggruppano in questa espressione in modo che Π comparisce come funzione soltanto delle *sei* quantità θ_1, θ_2, θ_3, ω_1, ω_2, ω_3.

7. Portando gli ultimi risultati nelle equazioni dell'equilibrio, queste non dipendono più che da *tre* funzioni, e si addicono così ai soli corpi *elastici*. Nella prima equazione indefinita l'ultima pa-

rentesi si riduce subito a $\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_1}$, mentre nella prima parentesi le funzioni $\nabla\Theta_1$, $Q_3Q_1^2\Omega_3$, $Q_2Q_1^2\Omega_2$ diventano

$$\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{11}}\,,\quad Q_3Q_1^2\cdot\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{12}}=\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{12}}\,,\quad Q_2Q_1^2\cdot\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{13}}=\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{13}}.$$

Riduzioni analoghe si hanno nelle altre due equazioni. Le equazioni ai limiti subiscono lievi cambiamenti di forma, e si ottengono finalmente le equazioni dell'equilibrio elastico:

$$\left\{\begin{aligned}
Q_1F_1&=\frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{11}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{12}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{13}}\right)\right]-\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_1}\\
Q_2F_2&=\frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{21}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{22}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{23}}\right)\right]-\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_2}\\
Q_3F_3&=\frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{31}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{32}}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{33}}\right)\right]-\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_3}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
Q_1\varphi_1&=Q_1\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{11}}\cos(nq_1)+Q_2\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{12}}\cos(nq_2)+Q_3\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{13}}\cos(nq_3)\\
Q_2\varphi_2&=Q_1\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{21}}\cos(nq_1)+Q_2\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{22}}\cos(nq_2)+Q_3\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{23}}\cos(nq_3)\\
Q_3\varphi_3&=Q_1\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{31}}\cos(nq_1)+Q_2\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{32}}\cos(nq_2)+Q_3\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{33}}\cos(nq_3)
\end{aligned}\right.$$

Queste equazioni si possono scrivere succintamente come segue (*):

$$(10)\quad Q_iF_i=\frac{1}{\nabla}\sum_j\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{ij}}\right)-\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_i}\,,\quad Q_i\varphi_i=\sum_j Q_j\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{ij}}\cos(nq_j):(i=1,2,3)$$

8. **Espressione di Θ in coordinate curvilinee.** Sappiamo che Θ è la somma dei coefficienti di allungamento secondo tre assi ortogonali qualunque. Ne segue, adoperando le formole (6),

$$\Theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3=\sum_i\left[\frac{\partial\kappa_i}{\partial q_i}+\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right)\kappa_i\right].$$

(*) Se invece delle κ si mettono in evidenza gli spostamenti $Q\kappa$, si ottengono le equazioni dell'equilibrio sotto la forma data loro da C. NEUMANN nella Memoria « *Zur Theorie der Elasticität* ». Il primo a tradurre in coordinate curvilinee le equazioni generali dell'elasticità è stato LAMÉ. Vedi le « *Leçons sur les coord. curvilignes* », § CXLIV a § CXLVII.

L'espressione sottoposta al segno sommatorio equivale a

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial q_i} + \kappa_i \frac{\partial}{\partial q_i} \log Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{\nabla}\left(\nabla \frac{\partial \kappa_i}{\partial q_i} + \kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i}\right).$$

Dunque

$$\Theta = \frac{1}{\nabla}\left(\frac{\partial \nabla \kappa_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \nabla \kappa_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \nabla \kappa_3}{\partial q_3}\right). \tag{11}$$

9. Espressioni di $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ in coordinate curvilinee. Prendiamo per un istante come assi cartesiani le tangenti alle linee coordinate, e tracciamo nel piano delle xy, intorno all'origine, una curva chiusa. È noto che l'integrale $\int_\sigma (udx + vdy)$, esteso a questa curva, si trasforma nell'integrale $\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) ds$, esteso all'area racchiusa nella curva stessa, ed è chiaro che, restringendo indefinitamente la curva intorno all'origine, si ha

$$\lim \frac{1}{s}\int_\sigma (udx + vdy) = \lim \frac{\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) ds}{\int ds} = \mathcal{C}_3 ,$$

poichè $\mathcal{C}_3$ è il valore di $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ nel punto considerato. Ciò premesso, valutiamo il primo integrale in coordinate curvilinee. Si ha $ds = Q_1 Q_2 dq_1 dq_2$, e gli spostamenti u, v sono espressi da $Q_1 \kappa_1$, $Q_2 \kappa_2$, mentre $dx = Q_1 dq_1$, $dy = Q_2 dq_2$. Per conseguenza

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_3 &= \lim \frac{1}{s}\int_\sigma (Q_1^2 \kappa_1 dq_1 + Q_2^2 \kappa_2 dq_2) \\ &= \lim \frac{1}{s}\iint \left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right) dq_1 dq_2 ,\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{C}_3 = \lim \frac{\int \left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right) \frac{ds}{Q_1 Q_2}}{\int ds} = \frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right).$$

Dunque (*)

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{T}_1 &= \frac{1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_3^2 \kappa_3}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_3}\right), \\ \mathfrak{T}_2 &= \frac{1}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3^2 \kappa_3}{\partial q_1}\right), \\ \mathfrak{T}_3 &= \frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right).\end{aligned}\right. \tag{12}$$

10. Ora cerchiamo di vedere quale forma speciale assumono le equazioni dell'equilibrio nel caso dell'isotropia. Se si procedesse alla sostituzione diretta della particolare forma che ha Π nei corpi isotropi, i calcoli si complicherebbero molto, e tale complicazione, come ha osservato il prof. Beltrami, « non è un fatto meramente algoritmico, ma ha la sua radice nella *natura* (**) stessa dello spazio ». Si hanno invece notevoli semplificazioni se si ricorre ad una nota (*cap.* V, § 3) decomposizione del potenziale Π in due parti, una delle quali non influisce sulle equazioni indefinite. Di queste sole equazioni intendiamo qui occuparci, poichè la sostituzione delle Θ e delle Ω nelle equazioni ai limiti non offre difficoltà. Sostituiamo dunque

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B(\mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^2)\right]$$

a Π, nelle equazioni indefinite, mettendo per Θ e per le $\mathfrak{T}$ le espressioni (11) e (12). Invece di eseguire la sostituzione diretta, conviene meglio rifare il calcolo che ci ha condotti alle equazioni generali. A questo scopo si consideri

$$\int \delta\Pi_0 dS = -\int\left[A\Theta\delta\Theta + B(\mathfrak{T}_1\delta\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2\delta\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3\delta\mathfrak{T}_3)\right] dS.$$

Prima si ha

$$\int \Theta\delta\Theta dS = \sum_i \int\left[\frac{\partial \delta\kappa_i}{\partial q_i} + \left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right)\delta\kappa_i\right]\Theta dS.$$

(*) Vedi il primo lavoro sull'*idrodinamica razionale* pubblicato dal Prof. Beltrami nelle *Memorie dell'Accademia di Bologna* (1871, pp. 463, 471).

(**) Vedi il capitolo seguente.

L'integrale sottoposto al segno sommatorio equivale a

$$\int \nabla\Theta \frac{\partial \delta\kappa_i}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla} + \int \Theta\delta\kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\Theta\delta\kappa_i)\frac{dS}{\nabla} - \int \delta\kappa_i \frac{\partial \nabla\Theta}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla} + \int \Theta\delta\kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla}.$$

Il primo integrale si trasforma in integrale di superficie, e negli altri due si trova $-\delta\kappa_i \frac{dS}{\nabla}$ moltiplicato per

$$\frac{\partial \nabla\Theta}{\partial q_i} - \Theta \frac{\partial \nabla}{\partial q_i} = \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial q_i}.$$

Per conseguenza

$$\int \Theta\delta\Theta dS = -\int \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}\delta\kappa_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial q_2}\delta\kappa_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial q_3}\delta\kappa_3 \right) dS + \text{integr. di sup.}$$

Similmente

$$\int \mathfrak{T}_1 \delta\mathfrak{T}_1 dS = \int Q_1 \mathfrak{T}_1 \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_3^2 \delta\kappa_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(Q_2^2 \delta\kappa_2) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_3^2 Q_1 \mathfrak{T}_1 \delta\kappa_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(Q_2^2 Q_1 \mathfrak{T}_1 \delta\kappa_2) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int \left(Q_3^2 \delta\kappa_3 \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - Q_2^2 \delta\kappa_2 \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla};$$

ecc. Dunque le equazioni indefinite per l'equilibrio elastico sono

$$\left\{ \begin{aligned} & F_1 + \frac{A}{Q_1}\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} + \frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2} \right) = 0, \\ & F_2 + \frac{A}{Q_2}\frac{\partial \Theta}{\partial q_2} + \frac{B}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3} \right) = 0, \\ & F_3 + \frac{A}{Q_3}\frac{\partial \Theta}{\partial q_3} + \frac{B}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_1} \right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Supponiamole integrate. Si conosceranno allora le κ, e quindi si

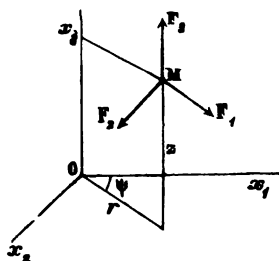
potranno calcolare le θ e le ω mediante le formole di definizione. Poi le Θ e le Ω saranno date dalle formole

$$\left\{\begin{array}{ll} \Theta_1 = -A\Theta + 2B(\theta_2 + \theta_3) \ , & \Omega_1 = -B\omega_1 \ , \\ \Theta_2 = -A\Theta + 2B(\theta_3 + \theta_1) \ , & \Omega_2 = -B\omega_2 \ , \\ \Theta_3 = -A\Theta + 2B(\theta_1 + \theta_2) \ , & \Omega_3 = -B\omega_3 \ , \end{array}\right. \tag{14}$$

che si ottengono derivando il potenziale unitario

$$\Pi = -\frac{1}{2}\left[A(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2 + B(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2-4\theta_2\theta_3-4\theta_3\theta_1-4\theta_1\theta_2)\right].$$

Finalmente, sostituendo le Θ e le Ω nelle equazioni ai limiti, si determinano le costanti arbitrarie.

11. Esempio. Assumiamo coordinate cilindriche, consideriamo cioè il sistema triplo ortogonale, costituito come segue: cilindri di rotazione con l'asse comune Ox_3; piani che passano per Ox_3; piani perpendicolari ad Ox_3. Parametri: $q_1 = r$, $q_2 = \psi$, $q_3 = z$. Elementi lineari coordinati:

$$Q_1 dq_1 = dr \ , \ Q_2 dq_2 = r d\psi \ , \ Q_3 dq_3 = dz .$$

Dunque $Q_1 = 1$, $Q_2 = r$, $Q_3 = 1$, $\nabla = r$. Finalmente poniamo $\kappa_1 = u$, $\kappa_2 = v$, $\kappa_3 = w$, avvertendo che gli spostamenti sono u, rv, w. Le formole (11) e (12) dànno

$$\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial z} \ , \tag{15}$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi} - r\frac{\partial v}{\partial z} \ , \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \ , \quad \mathfrak{T}_3 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(vr^2)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\right) , \tag{16}$$

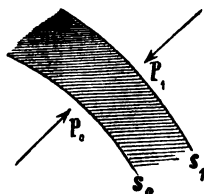
e le equazioni (13) diventano

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial\psi}\right) = 0 \ , \\ F_2 + \dfrac{A}{r}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\psi} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial r} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial z}\right) = 0 \ , \\ F_3 + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\psi} - \dfrac{\partial(r\mathfrak{T}_2)}{\partial r}\right) = 0 . \end{array}\right. \tag{17}$$

Le θ e le ω sono date dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial u}{\partial r} , & \omega_1 &= r\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi} , \\ \theta_2 &= \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{u}{r} , & \omega_2 &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} , \\ \theta_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} , & \omega_3 &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \psi} + r\frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Finalmente le Θ e le Ω si hanno dalle formole (14).

12. Applicazione all'involucro cilindrico. Siano: r_0, p_0, raggio e pressione unitaria sulla superficie interna; r_1, p_1, raggio e pressione sulla superficie esterna. Si suppongono nulle le forze di massa. Se le pressioni sono uniformemente distribuite in superficie si capisce che, per ragioni di simmetria, la deformazione sarà indipendente da ψ e da z, cioè si avranno u, Θ, $\mathfrak{T}_1$, ecc., funzioni di r soltanto, mentre v e w saranno uguali a zero. Con ciò le equazioni (17) diventano

$$\frac{d\Theta}{dr} = 0 , \quad \frac{d\mathfrak{T}_3}{dr} = 0 , \quad \frac{d(\mathfrak{T}_2 r)}{dr} = 0 .$$

D'altra parte dalle (16) si ha $\mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0$. Perciò le ultime due equazioni sono soddisfatte, e la prima diventa, in virtù di (15),

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dur}{dr}\right) = 0 .$$

Se ne deduce, integrando,

$$u = \lambda r + \frac{\mu}{r} .$$

Per la determinazione di λ e μ bisogna servirsi delle equazioni ai limiti; ma prima occorre calcolare le Θ e le Ω, che sono date dalle formole (14). Nel caso attuale le formole (18) dànno

$$\theta_1 = \frac{du}{dr} , \quad \theta_2 = \frac{u}{r} , \quad \theta_3 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 ,$$

e quindi si ha dalle (14)

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 ,$$

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_1 &= -A\Theta + 2B\frac{u}{r} = -2\lambda A + 2B\left(\lambda + \frac{\mu}{r^2}\right) = -2\lambda(A-B) + \frac{2\mu B}{r^2} \\ \Theta_2 &= -A\Theta + 2B\frac{du}{dr} = -2\lambda A + 2B\left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) = -2\lambda(A-B) - \frac{2\mu B}{r^2} \\ \Theta_3 &= -A\Theta + 2B\left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right) = -2\lambda A + 4\lambda B = -2\lambda(A-2B) . \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Ciò premesso, le equazioni ai limiti diventano $\varphi_1 = \Theta_1 \cos(nr)$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Sulla superficie interna $\varphi_1 = p_0$, $\cos(nr) = 1$. Sulla superficie esterna $\varphi_1 = -p_1$, $\cos(nr) = -1$. Dunque

$$p_0 = -2\lambda(A-B) + \frac{2\mu B}{r_0^2}, \quad p_1 = -2\lambda(A-B) + \frac{2\mu B}{r_1^2}.$$

Se ne deduce

$$\lambda = -\frac{1}{2(A-B)} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad \mu = -\frac{1}{2B} \frac{(p_1 - p_0) r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Restano così completamente determinati gli spostamenti, la dilatazione unitaria, ecc. Finalmente le formole (19) faranno conoscere la distribuzione delle azioni interne in ciascun punto del corpo. Per esempio, nel caso d'una cavità cilindrica indefinita, si ha $\lambda = 0$, $2\mu B = p_0 r_0^2$, e le formole (19) dànno

$$\Theta_1 = -\Theta_2 = p_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad \Theta_3 = 0.$$

Ne segue che, considerando l'infinità delle sezioni piane fatte nel corpo perpendicolarmente all'asse, queste si comportano come se fossero indipendenti le une dalle altre; ed in ogni sezione si sviluppano radialmente pressioni, e lateralmente tensioni, uguali per ogni punto in valore assoluto, e variabili da un punto all'altro in ragione inversa del quadrato del raggio.

18. Teorema di Betti. Il teorema di Betti sussiste in coordinate curvilinee ortogonali. Ciò non è evidente *a priori*, perchè nel caso delle coordinate curvilinee generali l'orientazione delle terne di assi, rispetto a cui si computano gli spostamenti $Q\kappa$, varia da punto a punto. Rappresentiamo con $Q\kappa'$ altri spostamenti, dovuti alle forze (F_1', F_2', F_3'), $(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$. Moltiplicando le equazioni (10) per $\kappa'_i dS$ ed integrando si ottiene

$$\int Q_i F_i \kappa'_i dS$$

$$= \int \kappa'_i \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}}\right)\right] \frac{dS}{\nabla} - \int \kappa'_i \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} dS.$$

Il primo integrale equivale a

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}}\right)\right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int \left(\kappa'_{i1} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} + \kappa'_{i2} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}} + \kappa'_{i3} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}} \right) dS.$$

A sua volta il primo di questi integrali si trasforma in

$$-\int \left[Q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} \cos(nq_1) + Q_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}} \cos(nq_2) + Q_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}} \cos(nq_3) \right] \kappa'_i \, ds = -\int Q_i \varphi_i \kappa'_i \, ds .$$

Dunque, facendo $i = 1, 2, 3$ e sommando,

$$\sum_i \left\{ \int Q_i F_i \kappa'_i dS + \int Q_i \varphi_i \kappa'_i ds \right\}$$

$$= -\int \left(\kappa'_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_1} + \kappa'_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_2} + \ldots + \kappa'_{11} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{11}} + \kappa'_{12} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{12}} + \ldots + \kappa'_{33} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{33}} \right) dS .$$

Poichè Π è forma quadratica di $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_{11}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \ldots, \kappa_{23}, \kappa_{33}$, il secondo membro non varia quando si scambiano le κ con le κ'. Dunque

$$\begin{aligned} &\int (Q_1 F_1 \kappa'_1 + Q_2 F_2 \kappa'_2 + Q_3 F_3 \kappa'_3) dS + \int (Q_1 \varphi_1 \kappa'_1 + Q_2 \varphi_2 \kappa'_2 + Q_3 \varphi_3 \kappa'_3) ds \\ &= \int (Q_1 F'_1 \kappa_1 + Q_2 F'_2 \kappa_2 + Q_3 F'_3 \kappa_3) dS + \int (Q_1 \varphi'_1 \kappa_1 + Q_2 \varphi'_2 \kappa_2 + Q_3 \varphi'_3 \kappa_3) ds . \end{aligned} \tag{20}$$

14. Del precedente teorema si possono fare quelle stesse applicazioni che sono state date nel *cap.* VI; ma tutto dipende dalla effettiva integrazione delle equazioni (8), in cui si possono supporre *costanti* le θ e le ω. Si ottengono così per le κ' espressioni che, oltre le θ e le ω, contengono linearmente sei costanti arbitrarie, $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Quando le θ e le ω si pongono uguali a zero, le relative κ' corrispondono all'ipotesi della rigidità, e però sono nulle le F' e le φ'. Quindi la formola (20) si riduce al primo membro uguale a zero. L'equazione così ottenuta si scinde poi, per l'arbitrio che regna sulle a, in *sei* equazioni distinte, che sono le equazioni dell'equilibrio rigido. Se invece si pongono uguali a zero le a, e si determinano le θ e le ω mediante le sei equazioni di primo grado

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 1 \quad , \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \; ,$$

le equazioni (4) e (5) dànno

$$F_i' = 0 \quad , \quad \varphi'_i = \cos(nq_i) \quad ; \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Quindi il secondo membro di (20) diventa

$$\int \left[Q_1 \kappa_1 \cos(nq_1) + Q_2 \kappa_2 \cos(nq_2) + Q_3 \kappa_3 \cos(nq_3) \right] ds$$
$$= -\int \left(\frac{\partial \nabla \kappa_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \nabla \kappa_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \nabla \kappa_3}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla}.$$

Ne segue, sostituendo in (20) ed osservando (11),

$$-\int \theta dS = \int (Q_1 F_1 \kappa'_1 + Q_2 F_2 \kappa'_2 + Q_3 F_3 \kappa'_3) dS + \int (Q_1 \varphi_1 \kappa'_1 + Q_2 \varphi_2 \kappa'_2 + Q_3 \varphi_3 \kappa'_3) ds.$$

Così resta determinata la dilatazione totale in qualunque deformazione.

15. Esempio. Nel caso delle coordinate cilindriche si debbono integrare le equazioni (18) supponendo costanti le θ e le ω. Distinguiamo le equazioni stesse mediante i loro primi membri. Derivando la (ω_2) rispetto a z ed r, successivamente, si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0.$$

Quindi si vede che $\frac{\partial u}{\partial z}$ è indipendente da z, mentre $\frac{\partial u}{\partial r} = \theta_1$. Similmente $\frac{\partial w}{\partial r}$ è indipendente da r, mentre $\frac{\partial w}{\partial z} = \theta_3$. Dunque

$$u = \theta_1 r + zF(\psi) + G(\psi) \quad , \quad w = \theta_3 z + rU(\psi) + V(\psi). \tag{21}$$

Sostituendo in (ω_2) si vede che

$$F(\psi) + U(\psi) = \omega_2. \tag{22}$$

Derivando (ω_3) ed (ω_1) rispetto a ψ, e tenendo conto di (θ_2), si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{u}{r} \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} = r \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Se ne deduce, in virtù delle (21),

$$F + F'' = 0 \quad , \quad G + G'' = 0 \quad , \quad V'' = 0;$$

poi

$$F(\psi) = a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi \quad , \quad G(\psi) = a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \quad , \quad V = m\psi + a_5 .$$

Le (21) diventano, tenendo conto di (22),

$$\begin{cases} u = \theta_1 r + (a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi) z + a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \\ w = \theta_3 z + (\omega_2 - a_1 \operatorname{sen}\psi - a_2 \cos\psi) r + m\psi + a_5 . \end{cases}$$

Ora integrando (θ_2) si ottiene

$$v = (\theta_2 - \theta_1)\psi + \frac{z}{r}(a_1 \cos\psi - a_2 \operatorname{sen}\psi) + \frac{1}{r}(a_3 \cos\psi - a_4 \operatorname{sen}\psi) + H(r, z) .$$

La sostituzione di questo risultato in (ω_3) ed (ω_1) mostra che la funzione H deve soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\omega_3}{r} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\omega_1}{r} - \frac{m}{r^2} .$$

Dunque $\omega_1 = 0$ (*), $m = 0$, $H = \omega_3 \log r + a_6$. Finalmente

$$\begin{cases} u = \theta_1 r + (a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi) z + a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \\ w = \theta_3 z + (\omega_2 - a_1 \operatorname{sen}\psi - a_2 \cos\psi) r + a_5 \\ v = (\theta_2 - \theta_1)\psi + \frac{z}{r}(a_1 \cos\psi - a_2 \operatorname{sen}\psi) + \frac{1}{r}(a_3 \cos\psi - a_4 \operatorname{sen}\psi) + \omega_3 \log r + a_6 . \end{cases}$$

Ed ora è facile trovare, col processo indicato, le sei condizioni dell'equilibrio rigido, la dilatazione totale, ecc. Ai risultati che si ottengono in questo caso particolare si perviene più rapidamente mercè la trasformazione diretta dei risultati analoghi, ottenuti in coordinate cartesiane; ma per questa trasformazione è necessario conoscere le relazioni esistenti fra le q e le x, e del resto il processo generale qui esposto ha il vantaggio di restare applicabile quando si esclude la verità del postulato di Euclide nello spazio considerato.

(*) Quella che si potrebbe chiamare una deformazione *omogenea*, in riguardo alla particolare rappresentazione cilindrica che qui si considera, non è dunque possibile se non supponendo che due elementi superficiali qualunque, situati rispettivamente in un piano perpendicolare all'asse ed in un piano che contiene l'asse, restino ortogonali nella deformazione. Con ciò si vede che non si possono attribuire arbitrariamente, come nella rappresentazione cartesiana, valori costanti alle θ ed alle ω. Le condizioni alle quali debbono soddisfare queste quantità, costanti o variabili, sono state segnalate dal Prof. E. Padova nel *vol.* III degli « *Studii offerti dall'Università Padovana alla Bolognese nell' VIII centenario*, ecc. ».

XXII. ELASTICITÀ NEGLI SPAZII CURVI.

1. Prima di penetrare nel campo delle ricerche iniziate dal prof. Beltrami per lo studio della elasticità negli *spazii di curvatura costante* α, giova rammentare che questi sono caratterizzati dalla proprietà che possiede ogni loro figura rigida di restar sempre sovrapponibile a sè stessa dopo un moto qualunque. Questa proprietà è ammessa dogmaticamente nell'ordinaria Geometria, che si fonda inoltre su due noti postulati, caratterizzanti lo *spazio euclideo* ($\alpha = 0$) fra tutti gli spazii di curvatura costante, cioè il *postulato di Euclide* e quello dell'*infinità* dello spazio (*). È intuitivo che negli spazii di curvatura costante il concetto d'isotropia sussiste tal quale, per l'equa costituzione geometrica che tali spazii ammettono, in virtù della proprietà caratteristica precedentemente richiamata, intorno a ciascun punto. Invece, pur immaginando esteso il concetto stesso ad uno spazio qualunque, i coefficienti A e B bisognerà considerarli come variabili da punto a punto insieme alla curvatura (**). Osserviamo finalmente che *la rappresentazione cartesiana* suppone lo spazio infinito ed *include l'ipolesi euclidea*, dimodochè tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane sono esclusivamente applicabili allo spazio euclideo. Ne segue che, per lo studio della elasticità negli spazii non euclidei, bisogna far uso delle coordinate curvilinee generali, che nulla presuppongono circa la natura dello spazio; ma i risultati che si otterranno potranno allora solamente applicarsi agli spazii di curvatura costante, quando si considereranno inoltre come costanti i coefficienti A e B.

(*) Vedi, p. es., le *note del traduttore* al § 6 dell'interessante opera di Clifford: « *Il senso comune nelle scienze esatte* » (Milano, Dumolard, 1886). A questa fonte dovrebbero i giovani delle nostre scuole medie attingere la cultura matematica generale.

(**) Per acquistare una nozione precisa della curvatura degli spazii si studii la « *Teoria degli spazii di curvatura costante* » del Prof. Beltrami (*Annali di Matematica*, t. II della seconda serie, p. 232). Vedi anche Clifford, *loc. cit.*, p. 255.

2. Le considerazioni precedenti riescono forse più precise quando si ricorre al concetto analitico dello spazio, quando cioè si vuol dare il nome di spazio (a *tre* dimensioni) all'insieme delle terne di valori dei parametri q_1, q_2, q_3. Ad ogni terna *arbitraria* di funzioni Q_1, Q_2, Q_3 di q_1, q_2, q_3 corrisponde un particolare spazio, nel quale il quadrato dell'elemento lineare si esprime così:

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Perchè un tale spazio sia lo spazio euclideo (rappresentabile, come si è detto, in coordinate cartesiane) occorre e basta che si possano trovare tre funzioni x_1, x_2, x_3 di q_1, q_2, q_3, tali che sia

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Tentando l'effettiva integrazione si ottengono (*), fra le Q e le loro derivate, sei relazioni, dovute a Lamé, e si dimostra che queste sono condizioni *necessarie* e *sufficienti* per l'integrazione stessa, e conseguentemente per l'*euclideità* dello spazio. Tali condizioni risulteranno spontanee dall'analisi seguente, che ci fornirà più generalmente le condizioni analoghe perchè lo spazio considerato sia a curvatura costante. Qui conviene ricordare che, secondo Riemann (**), al quadrato dell'elemento lineare in uno spazio di curvatura costante si può sempre dare la forma

$$d\sigma^2 = Q^2 (dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2),$$

essendo Q_1, Q_2, Q_3 uguali a

$$Q = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}. \qquad (1)$$

Le coordinate q_1, q_2, q_3, che qui compariscono, son quelle che il prof. Beltrami chiama (***) *stereografiche*, e la costante α misura la *curvatura dello spazio*.

(*) Vedi Bianchi, *Geometria differenziale*, § 125.
(**) Leggi la celebre Memoria sulle ipotesi fondamentali della Geometria nelle *B. Riemann's math. Werke*, p. 264.
(***) *Loc. cit.*, p. 242.

3. Per ben rendersi conto dell'ultima forma di $d\sigma$ è forse utile cercare di stabilirla mediante considerazioni elementari, lasciandosi guidare dalle analogie con gli spazii a due dimensioni. È noto che la rappresentazione stereografica d'una superficie sferica si esegue projettando questa da un suo punto P sul piano tangente nel punto diametralmente opposto O. Le coordinate stereografiche d'un punto della superficie sono le coordinate cartesiane dell'immagine stereografica del punto stesso. Se N ed N' sono le immagini dei punti M ed M', si ha

$$OP^2 = PM \,.\, PN = PM' \,.\, PN'.$$

I triangoli PMM' e $PN'N$ sono dunque simili, e però $MM' : NN' = PM : PN'$. Quindi, se M' è infinitamente vicino ad M,

$$\frac{d\sigma}{NN'} = \frac{PM}{PN} = \frac{OP^2}{PN^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2},$$

e si ottiene così la formola di Riemann osservando che

$$NN'^2 = dq_1^2 + dq_2^2 \quad , \quad ON^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad , \quad OP^2 = \frac{4}{\alpha}.$$

4. Per ciò che si è detto precedentemente le equazioni generali dell'equilibrio (XX, *form.* 4 o 10) sono applicabili a tutti gli spazii, mentre le equazioni (13) del precedente capitolo convengono soltanto allo spazio euclideo, perchè l'artifizio cui si è dovuto ricorrere per abbreviare i calcoli è stato fatto (V, § 3) adoperando coordinate cartesiane. Ne segue che, se si vogliono ottenere le equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi in uno spazio qualunque, bisogna partire dalle equazioni generali (4), ed in esse introdurre direttamente l'ipotesi dell'isotropia, cioè supporre

$$\Theta_i = -(A - 2B)\Theta - 2B\theta_i \quad , \quad \Omega_i = -B\omega_i \,. \quad (i = 1, 2, 3)$$

con A e B variabili come α. Limitandoci al caso di α costante, consideriamo prima i termini moltiplicati per A. Essi dànno luogo, nella prima equazione (4), all'espressione

$$-A\left(\frac{1}{\nabla}\frac{\partial \nabla\Theta}{\partial q_1} - \frac{\Theta}{\nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial q_1}\right) = -A\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}.$$

I termini moltiplicati per B si riducono facilmente a

$$-\frac{2B}{\nabla}\left(Q_1\theta_1\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1} - Q_3 Q_1\frac{\partial Q_2\theta_2}{\partial q_1} - Q_1 Q_2\frac{\partial Q_3\theta_3}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^2 Q_3\omega_3}{\partial q_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^2 Q_2\omega_2}{\partial q_3}\right). \quad (2)$$

Si può prevedere che in questa espressione è inclusa quella che si ottiene nello spazio euclideo, cioè

$$-\frac{BQ_1}{Q_2Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right), \tag{3}$$

in cui

$$\mathfrak{T}_2=\frac{1}{Q_3Q_1}\left(\frac{\partial Q_1^2\kappa_1}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3^2\kappa_3}{\partial q_1}\right), \quad \mathfrak{T}_3=\frac{1}{Q_1Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1^2\kappa_1}{\partial q_2}\right). \tag{4}$$

Sostituendo (4) in (3), poi sottraendo il risultato da (2), resta (*) una funzione omogenea e lineare delle κ, cui si può dare la forma seguente

$$\frac{2B}{Q_2Q_3}\left\{(H_{22}+H_{33})\,Q_1\kappa_1-H_{12}Q_2\kappa_2-H_{13}Q_3\kappa_3\right\},$$

dopo aver posto

$$(5)\left\{\begin{aligned}
H_{11}&=Q_1\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\right]+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\\
H_{22}&=Q_2\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)\right]+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\\
H_{33}&=Q_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\right]+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\\
H_{23}&=H_{32}=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q_2\partial q_3}\\
H_{31}&=H_{13}=\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}-\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_3\partial q_1}\\
H_{12}&=H_{21}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}-\frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1\partial q_2}
\end{aligned}\right.$$

Se inoltre si pone

$$\Phi=\sum_{i,j}H_{ij}Q_iQ_j\kappa_i\kappa_j-(H_{11}+H_{22}+H_{33})\sum_i Q_i^2\kappa_i^2, \tag{6}$$

(*) Per i dettagli del calcolo vedi il paragrafo seguente.

si riconosce finalmente che l'espressione (2) equivale a

$$-\frac{BQ_1}{Q_2Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right)-\frac{B}{Q_2Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial Q_1\kappa_1}.$$

Le equazioni indefinite per l'equilibrio si riducono dunque a

$$(7)\quad\begin{cases} F_1+\dfrac{A}{Q_1}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_1}+\dfrac{B}{Q_2Q_3}\left(\dfrac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_3}-\dfrac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right)+\dfrac{B}{Q_1Q_2Q_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q_1\kappa_1}=0, \\ F_2+\dfrac{A}{Q_2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_2}+\dfrac{B}{Q_3Q_1}\left(\dfrac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_1}-\dfrac{\partial Q_1\mathfrak{G}_1}{\partial q_3}\right)+\dfrac{B}{Q_1Q_2Q_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q_2\kappa_2}=0, \\ F_3+\dfrac{A}{Q_3}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_3}+\dfrac{B}{Q_1Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_1\mathfrak{G}_1}{\partial q_2}-\dfrac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_1}\right)+\dfrac{B}{Q_1Q_2Q_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q_3\kappa_3}=0. \end{cases}$$

5. Per eseguire in dettaglio il calcolo accennato nel paragrafo precedente, riprendiamo l'espressione (2), e, dopo averne cambiato il segno, scriviamola così:

$$\frac{2B}{Q_2Q_3}\left(\theta_1\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}-Q_3\frac{\partial Q_2\theta_2}{\partial q_1}-Q_2\frac{\partial Q_3\theta_3}{\partial q_1}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_2\omega_2}{\partial q_3}\right).$$

Sottraendone

$$\frac{BQ_1}{Q_2Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right)$$

e mettendo da parte il fattore $\frac{2B}{Q_2Q_3}$, viene

$$\theta_1\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}-Q_3\frac{\partial Q_2\theta_2}{\partial q_1}-Q_2\frac{\partial Q_3\theta_3}{\partial q_1}$$
$$+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_2\omega_2}{\partial q_3}-\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_3}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}. \qquad (8)$$

Ora si noti che

$$\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}=\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_3\omega_3}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}-\frac{Q_3\mathfrak{G}_3}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}Q_1Q_3(\omega_3+\mathfrak{T}_3)+\frac{1}{2}Q_3(\omega_3-\mathfrak{T}_3)\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}.$$

D'altra parte si ha

$$\omega_3=\frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial\kappa_1}{\partial q_2}+\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial\kappa_2}{\partial q_1}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1},$$

$$\mathfrak{T}_3=\frac{1}{Q_1Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1^2\kappa_1}{\partial q_2}\right)=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1},$$

dimodochè

$$\frac{1}{2}(\omega_3+\mathfrak{T}_3)=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\,,\quad \frac{1}{2}(\omega_3-\mathfrak{T}_3)=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}.$$

Dunque

$$\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3\mathfrak{T}_3}{\partial q_2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_3\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}Q_1\kappa_1\right)+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{Q_3}{Q_1}\kappa_2\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)$$

$$=Q_3\frac{\partial^2 Q_2\kappa_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_2\omega_2}{\partial q_3}-\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_2\mathfrak{T}_2}{\partial q_3}$$

$$=Q_2\frac{\partial^2 Q_3\kappa_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3.$$

Inoltre si ha

$$Q_1\theta_1=Q_1\frac{\partial\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3=\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3,$$

e però l'espressione (8) diventa

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right)$$

$$-Q_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\kappa_3\right)-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_3}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\kappa_2\right)$$

$$+Q_3\frac{\partial^2 Q_2\kappa_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2$$

$$+Q_2\frac{\partial^2 Q_3\kappa_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3.$$

I termini

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}\,,\quad \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}\,,\quad \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}$$

si elidono rispettivamente con

$$-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}\,,$$

$$-Q_2\cdot\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}\,,\quad -Q_3\cdot\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}\,,$$

e l'espressione considerata diventa

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right)-Q_3\left[Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+Q_3\kappa_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\right]$$

$$-Q_2\left[Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)+Q_2\kappa_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)\right]$$

$$-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3 .$$

Questa è lineare nelle κ. Il coefficiente di $Q_2\kappa_2$ è

$$\frac{1}{Q_1 Q_2}\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$$

$$=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1 \partial q_2}=H_{12} .$$

Similmente il coefficiente di $Q_3\kappa_3$ è H_{13}, e quello di $Q_1\kappa_1$ è

$$-Q_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)$$

$$=-Q_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\right]-\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}$$

$$-Q_2\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)\right]-\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} ,$$

cioè $-(H_{22}+H_{33})$. Dunque la prima equazione indefinita dell'equilibrio è

$$Q_1 F_1+A\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}+\frac{B Q_1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{G}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right)$$

$$+\frac{2B}{Q_2 Q_3}\left[-(H_{22}+H_{33})Q_1\kappa_1+H_{12}Q_2\kappa_2+H_{13}Q_3\kappa_3\right]=0 ,$$

vale a dire

$$F_1+\frac{A}{Q_1}\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}+\frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{G}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right)+\frac{B}{Q_1 Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_1\kappa_1}=0 ; \text{ ecc.}$$

6. Le equazioni (7) non si trovano ancora sotto la loro forma definitiva, in quanto che l'ipotesi della *curvatura costante*, di cui si è tenuto conto soltanto col supporre costanti A e B, non è stata ancora introdotta nel sistema stesso delle coordinate. Osserviamo

anzitutto che alle equazioni (7) saremmo egualmente pervenuti col processo generale, prendendo a considerare, invece del potenziale Π, una sua parte Π_0, espressa come segue:

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B(\mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^2)\right] + \frac{B\Phi}{\nabla}.$$

Ciò mette in evidenza il carattere invariantivo dell'espressione $\frac{\Phi}{\nabla}$, e ci autorizza quindi, per trovarne il significato, a specializzare il sistema di coordinate. Assumiamo dunque coordinate stereografiche, per le quali Q_1, Q_2, Q_3 hanno, come si è detto, l'espressione (1). Le formole (5) e (6) dànno successivamente

$$H_{ij} = \left| \begin{array}{ll} -Q^3\alpha \;, & \text{se } i=j \\ 0 \;, & \text{se } i \neq j \end{array} \right. , \qquad \frac{\Phi}{\nabla} = 2\alpha Q^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2).$$

Adunque $\frac{\Phi}{\nabla}$ *è il prodotto di* 2α *per il quadrato dello spostamento*. Ne segue che, negli spazii di curvatura costante α, per qualunque sistema di coordinate ortogonali, si ha

$$\frac{\Phi}{\nabla} = 2\alpha(Q_1^2\kappa_1^2 + Q_2^2\kappa_2^2 + Q_3^2\kappa_3^2), \tag{9}$$

e conseguentemente

$$\frac{1}{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial Q_i\kappa_i} = 4\alpha Q_i\kappa_i. \qquad (i=1,2,3) \tag{10}$$

Finalmente le equazioni (7) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 + \frac{A}{Q_1}\frac{\partial\Theta}{\partial q_1} + \frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_2}\right) + 4\alpha B Q_1\kappa_1 = 0\,, \\ F_2 + \frac{A}{Q_2}\frac{\partial\Theta}{\partial q_2} + \frac{B}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_3\mathfrak{G}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1\mathfrak{G}_1}{\partial q_3}\right) + 4\alpha B Q_2\kappa_2 = 0\,, \\ F_3 + \frac{A}{Q_3}\frac{\partial\Theta}{\partial q_3} + \frac{B}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_1\mathfrak{G}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2\mathfrak{G}_2}{\partial q_1}\right) + 4\alpha B Q_3\kappa_3 = 0\,. \end{array} \right. \tag{11}$$

Son queste, in coordinate ortogonali qualunque, le *equazioni del-*

l'equilibrio elastico dei corpi isotropi, negli spazii di curvatura costante α.

7. **Osservazioni :** *a)* Perchè le equazioni (7) coincidano con le (11) occorre e basta che siano verificate le relazioni (10), cioè che Φ abbia la forma (9), e sia quindi

$$H_{11}=H_{22}=H_{33}=-\alpha\nabla \quad , \quad H_{23}=H_{31}=H_{12}=0\,.$$

Queste sono dunque le condizioni necessarie e sufficienti per l'invariabilità della curvatura dello spazio. Per $\alpha=0$ si ritrovano le condizioni indicate da Lamé come necessarie e sufficienti per l'*euclideità* dello spazio, cioè

$$H_{11}=H_{22}=H_{33}=H_{23}=H_{31}=H_{12}=0\,.$$

In virtù d'una nota (*cap.* XVII, *form.* 7) relazione si può dar loro la forma seguente (*):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\frac{1}{r_{23}}}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial\frac{1}{r_{32}}}{\partial\sigma_3}+\frac{1}{r_{23}^2}+\frac{1}{r_{32}^2}+\frac{1}{r_{12}r_{13}}=0\,,\\
&\frac{\partial\frac{1}{r_{31}}}{\partial\sigma_3}+\frac{\partial\frac{1}{r_{13}}}{\partial\sigma_1}+\frac{1}{r_{31}^2}+\frac{1}{r_{13}^2}+\frac{1}{r_{23}r_{21}}=0\,,\\
&\frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial\frac{1}{r_{21}}}{\partial\sigma_2}+\frac{1}{r_{12}^2}+\frac{1}{r_{21}^2}+\frac{1}{r_{31}r_{32}}=0\,,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\frac{1}{r_{21}}}{\partial\sigma_3}=\frac{1}{r_{31}}\left(\frac{1}{r_{23}}-\frac{1}{r_{21}}\right) \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial\frac{1}{r_{31}}}{\partial\sigma_2}=\frac{1}{r_{21}}\left(\frac{1}{r_{32}}-\frac{1}{r_{31}}\right)\,,\\
&\frac{\partial\frac{1}{r_{32}}}{\partial\sigma_1}=\frac{1}{r_{12}}\left(\frac{1}{r_{31}}-\frac{1}{r_{32}}\right) \quad \text{»} \quad \frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial\sigma_3}=\frac{1}{r_{32}}\left(\frac{1}{r_{13}}-\frac{1}{r_{12}}\right)\,,\\
&\frac{\partial\frac{1}{r_{13}}}{\partial\sigma_2}=\frac{1}{r_{23}}\left(\frac{1}{r_{12}}-\frac{1}{r_{13}}\right) \quad \text{»} \quad \frac{\partial\frac{1}{r_{23}}}{\partial\sigma_1}=\frac{1}{r_{13}}\left(\frac{1}{r_{21}}-\frac{1}{r_{23}}\right)\,.
\end{aligned}\right.$$

b) Le relazioni di Lamé si ottengono ordinariamente tentando l'integrazione delle equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_j}+\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_j}+\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_j}=\left|\begin{array}{ll} Q_i^2\,, & \text{se } i=j \\ 0\,, & \text{se } i\neq j\end{array}\right.$$

che servono a determinare le coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 in funzione di q_1, q_2, q_3. Per uno spazio a due dimensioni le equazioni analoghe si ottengono sup-

(*) Lamé, « *Leçons*... », § XLVI.

ponendo x_1 ed x_2 funzioni di Q_1 e Q_2, lasciando che x_3 sia una funzione arbitraria della sola q_3, e quindi che Q_3 sia funzione soltanto di q_3, mentre Q_1 e Q_2 sono indipendenti da q_3. Allora cinque relazioni di Lamé sono soddisfatte, e la sola $H_{33}=0$ si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)=0.$$

Questa è dunque l'unica condizione cui debbano soddisfare le funzioni Q_1 e Q_2 perchè si possa dalla forma $Q_1^2dq_1^2+Q_2^2dq_2^2$ del quadrato dell'elemento lineare, in uno spazio a due dimensioni, passare alla forma cartesiana $dx_1^2+dx_2^2$. Se r_1 ed r_2 sono i raggi geodetici di curvatura delle linee q_1 e q_2 sulla superficie considerata, si può a quella condizione dar la forma

$$\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\sigma_2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=0.$$

È facile verificare che questa condizione è soddisfatta dagli ordinarii sistemi di curve ortogonali, che si adoperano nel piano.

c) Se α_1 è la curvatura della superficie q_1, in un dato punto, bisogna alla condizione precedentemente ottenuta sostituire, come si è visto per gli spazii a tre dimensioni,

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)+\alpha_1 Q_2Q_3=0.$$

Si ha dunque

$$H_{11}=-\alpha_1 Q_1Q_2Q_3+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}=\left(\frac{1}{r_{12}r_{13}}-\alpha_1\right)\nabla,$$

e le condizioni $H_{ii}+\alpha\nabla=0$ diventano

$$\alpha_1=\alpha+\frac{1}{r_{12}r_{13}}\quad,\quad\alpha_2=\alpha+\frac{1}{r_{23}r_{21}}\quad,\quad\alpha_3=\alpha+\frac{1}{r_{31}r_{32}}.$$

Queste dànno, per $\alpha=0$, la misura della curvatura (prodotto delle curvature principali) delle tre superficie coordinate, secondo il teorema di Gauss. Per α diverso da zero, si vede che alla curvatura geodetica di ciascuna superficie, in uno spazio curvo, viene ad aggiungersi la curvatura stessa dello spazio.

8. Ritornando alle (11) osserviamo, col prof. Beltrami, che « si poteva prevedere che la curvatura dello spazio non dovesse essere priva d'influenza sulle equazioni dell'elasticità; ma è senza dubbio sommamente notevole che tale influenza vi si manifesti sotto un aspetto così semplice ». Purtuttavia possiamo aggiungere che « non-

ostante questa semplicità, la teoria dei mezzi elastici negli spazii di curvatura costante presenta differenze rilevantissime in confronto dell'ordinaria ». Un primo esempio si ha scrivendo le equazioni (11), in assenza di forze di massa, nel seguente modo:

$$A\frac{\nabla}{Q_1^2}\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}+B\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)+4\alpha B\nabla\kappa_1=0\,;\quad \text{ecc.}$$

Derivandole ora rispetto a q_1, q_2, q_3, poi sommando, si ottiene

$$A\Delta^2\Theta+4\alpha B\Theta=0\,.$$

Dunque in uno spazio curvo la dilatazione cubica non può, come nello spazio euclideo, soddisfare all'equazione di Laplace. Per esempio, non è possibile che Θ abbia, in tutto il corpo, un valore costante, diverso da zero.

9. Più notevole è il risultato che si ottiene considerando certe deformazioni potenziali. Essendo nulle, per tali deformazioni, le doppie componenti $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ della rotazione, si ricava dalle formole (12) del precedente capitolo che le $Q_i^2\kappa_i$ sono le derivate prime d'una funzione U, e la dilatazione totale è espressa da

$$\Theta=\frac{1}{\nabla}\sum_i\frac{\partial\nabla\kappa_i}{\partial q_i}=\frac{1}{\nabla}\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)=\Delta^2 U\,,$$

dimodochè le equazioni (11) diventano

$$F_i+\frac{\partial}{\partial\sigma_i}(A\Delta^2U+4\alpha BU)=0\,,\qquad (i=1,2,3)$$

e mostrano che anche le forze F ammettono una funzione potenziale. Se V è questa funzione, le tre equazioni indefinite si riducono all'unica

$$A\Delta^2U+4\alpha BU+V=0\,,$$

intendendo inclusa in U la costante d'integrazione. Se prendiamo $V=-4\alpha BU$, è $\Delta^2U=0$, e vediamo che si ha $F_i=-4\alpha BQ_i\kappa_i$. Otteniamo così una deformazione, priva tanto di dilatazione quanto

di rotazione, nella quale la forza e lo spostamento sono, per ogni punto, in un rapporto costante, ed hanno la medesima direzione (se $\alpha < 0$: spazio di Gauss o *pseudosferico*) o direzioni opposte (se $\alpha > 0$: spazio di Riemann o *sferico*). « Tale risultato » — dice il prof. Beltrami — « non ha riscontro nello spazio euclideo, e presenta una singolare analogia con certi concetti moderni sull'azione dei mezzi dielettrici ».

10. L'ultima osservazione richiama alla mente le ingegnose ipotesi che sono state proposte per spiegare luce, calore, magnetismo, ecc., considerandone i fenomeni come prodotti da una reazione che lo spazio opporrebbe alla variabilità della propria curvatura nel tempo. E qui importa osservare che il termine addizionale $\frac{B\Phi}{\nabla}$ nella parte efficace (per la formazione delle equazioni indefinite) del potenziale elastico si può considerare appunto come l'espressione dell'energia delle reazioni che lo spazio, rigido nella propria costituzione geometrica, oppone alla materia elastica che lo riempie, supponendo questa *inerte* nel senso che, obbligata a deformarsi nel detto spazio, essa tende a farlo come se lo spazio stesso fosse euclideo. L'ulteriore svolgimento della teoria dei mezzi elastici negli spazii curvi permetterà forse di rispondere alla domanda di Clifford (*): *se non potrebbe darsi che noi considerassimo come variazioni fisiche certi effetti realmente dovuti a cambiamenti della curvatura del nostro spazio; in altre parole, se alcune delle cause, che noi chiamiamo fisiche, e forse tutte, non fossero per avventura dovute alla costituzione geometrica dello spazio nel quale viviamo.*

(*) *Loc. cit.*, p. 267.

ERRATA

Pag. 24, linea 2, invece di $U_x + U$ leggi $U_x + U_y$.
» 61, linea 5, invece di K_i leggi K_{ij}
» 128 e 137, in fondo, invece di « *Traité* » leggi « *Théorie* »